FLAMURE SADIKI

MODELE STRUKTURASH ALGJEBRIKE

TERNARE

NË

GJEOMETRINË PROJEKTIVE

DISERTACION

REPUBLIKA E SHQIPËRISË

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS

FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE

DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

"MODELE STRUKTURASH ALGJEBRIKE TERNARE NË GJEOMETRINË PROJEKTIVE"

DISERTACION PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE

"DOKTOR"

Miratohet:

Punoi:

Mr.sc. Flamure Sadiki

Udhëheqës shkencor:

Prof. Dr. Kristaq Filipi

Tiranë, 2015

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

i paraqitur nga:

Flamure Sadiki

Udhëhequr nga:

Prof. Dr. Kristaq Filipi

Për marrjen e gradës shkencore

“DOKTOR”

Tema: **MODELE STRUKTURASH ALGJEBRIKE TERNARE NË GJEOMETRINË PROJEKTIVE**

Mbrohet me datë 02.03. 2015 para jurisë:

1. Prof. asoc. Shkëlqim KUKA Kryetar (oponent)
2. Prof. dr. Petro KARAJANI Anëtar
3. Prof. dr. Kostaq HILA Anëtar
4. Prof. asoc. Azir JUSUFI Anëtar
5. Prof. dr. Urim BUJARI Anëtar (oponent)

Tiranë, 2015

MIRËNJOHJE

Në fillim do të dëshiroja të shpreh përzemërsisht mirënjohjen dhe falënderimet e mia të veçanta udhëheqësit tim shkencor Prof. Dr. Kristaq Filipi, për udhëheqjen, mbështetjen dhe bashkëpunimin e tij të vazhdueshëm gjatë gjithë kohës së realizimit të këtij disertacioni.

U jam shumë mirënjohës të gjithë pedagogëve dhe strukturave të Fakultetit të Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, të cilët, me këshillat, mbështetjen, kurajën dhe sjelljen miqësore, dhanë ndihmesë të çmuar për mbarëvajtjen e këtij disertacioni.

Një falënderim i dedikoj edhe gjithë kolegëve të mi të Departamentit të Matematikës pranë Universitetit Shtetëror të Tetovës për inkurajimin, mbështetjen dhe bashkëveprimin gjatë gjithë kohës së përgatitjes së disertacionit.

Me theks të veçantë një falënderim shkon edhe për komisionin e nderuar të mbrojtjes së këtij disertacioni.

Do të dëshiroja që një falënderim të veçantë tu shpreh znj. Marjeta Filipi dhe gjithë familjes Filipi, për sjelljen e tyre dashamirëse dhe miqësore në çdo takim.

Në fund, falënderoj familjen time për mirëkuptimin, përkrahjen morale dhe mbështetjen e dhënë që nga fillimi e deri në përfundimin e këtij disertacioni.

PËRMBAJTJA

HYRJE

Ky disertacion është një studim në zonën kufitare midis dy disiplinave matematike të Algjebrës dhe të Gjeometrisë projektive.

Një rol kyç në zhvillimin teorik dhe aplikativ të Matematikës luan algjebra dhe sidomos algjebra abstrakte, e cila karakterizohet me theksin e saj në hulumtimin sistematik të strukturave algjebrike. H.S. Vandiver me publikimin e punimit me titull "*Note on a simple type of Algebra in which the cancellation law of addition does not hold*", që nga viti 1934 hapi një horizont të ri në hulumtimin e algjebrës abstrakte. Këtu ai futi një lloj të ri të sistemit algjebrik, i njohur si gjysmëunaza. Gjysmëunaza është një gjeneralizim i përbashkët i unazave asociative dhe laticave distributive. Një shembull i thjeshtë i gjysmëunazave është bashkësia e numrave natyrorë, e pajisur me veprimet e zakonshme të mbledhjes dhe të shumëzimit. Teoria e gjysmëunazave ka pasur një zhvillim të hovshëm ngase shumë koncepte klasike të teorisë së unazave janë gjeneralizuar në gjysmëunaza. Këto struktura hasen në teorinë e unazave komutative dhe jokomutative, në kombinatorikë dhe teori të grafeve, në automata dhe gjuhët formale, në gjeometrinë Euklidiane dhe topologji, në teorinë e probabilitetit dhe teorinë e optimizimit, në analizë funksionale dhe modelim matematikor të fizikës kuantike e tj. Për gjysmëunazat mund të përmendim publikimet [70], [71] të Jonathan S. Golan, "*Semirings - Algebraic Theory and Applications in Computer Science*" të U.Hebisch & H. J.Weinert si dhe punimet e K. Glazek "*A Guide to the Literature on Semirings and their Applications in Mathematics and Information Sciences*" dhe "*Modules over Semirings*".

Krahas tyre matematikanët filluan të kenë interes për ato struktura algjebrike, ku njëri nga veprimet në to të ishte veprim ternar. Në literaturë nocioni i strukturës algjebrike ternare daton që nga viti 1924 dhe u fut nga H. Prüfer në punimin "*Theorie der Abelschen Gruppen*". Më pas këto tipe strukturash algjebrike i studijoi W. Dörnte në "*Untersuchungenüber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff* ". Në vitin 1932, D. H. Lehmer në punimin "*A ternary analogue of abelian groups*" hulumtoi struktura algjebrike ternare të caktuara të cilët rezultonin grupe ternare komutative. Nocioni i gjysmëgrupit ternar u bë i njohur nga S. Banach në vitin 1944. Ai tregoi, me shembull, që gjysmëgrupi ternar nuk është e nevojshme të reduktohet në një gjysmëgrup ordinar. Gjysmëgrupi ternar është një strukturë algjebrike e përbërë nga një bashkësi joboshe në lidhje me një veprim ternar, që quhet shumëzim ternar, i cili gëzon vetinë asociative ternare. Në punimin "*On the extending of models I*" J. Los vërtetoi që çdo gjysmëgrup ternar mund të zhytet në një gjysmëgrup. Bazuar në punimin e Lehmer "*A ternary analogue of abelian groups*", gjysmëgrupi ternar *B* quhet grup ternar nëse për çdo $a,b,c\in B$, ekuacionet $abx=c, axb=c, xab=c$ kanë zgjidhje të vetme në *B*. Më tej një gjeneralizim i grupeve ternare u shqyrtua nga E. L. Post në "*Polyadic groups*". Në vitin 1962 M. R. Hestenes në punimin "*A ternary algebra with applications to matices and linear transformations*" studijoi nocionin e algjebrave ternare me aplikim në matrica dhe transformime lineare. Ai gjithashtu studjoi algjebrat ternare reale dhe komplekse të gjeneruara nga matricat dhe nënalgjebrat ternare komutative me dimension të fundëm. Një diskutim i detajuar lidhur me algjebrat ternare mund të gjendet në koleksionin e artikujve të M. R. Hestenes "*On ternary algebra*". Në vitin 1971 W.G. Lister në punimin "*Ternary Rings*" futi nocionin e unazës ternare dhe studijoi disa veti të rëndësishme të unazave ternare. Sipas tij unaza ternare është një strukturë algjebrike e përbërë nga bashkësia joboshe e pajisur me veprimin binar mbledhje dhe veprimin ternar shumëzim, që formon grup komutativ lidhur me mbledhjen, gjysmëgrup ternar lidhur me shumëzimin dhe në të cilin vlejnë ligjet e shpërndarjes. Në disertacion ne shqyrtojmë **gjysmëgrupin ternar dhe gjysmëunazën ternare,** nocioni i të cilës gjeneralizon nocionin e unazës ternare të dhënë nga Lister. Gjysmëunazën ternare e përkufizojmë si strukturë algjebrike të përbërë nga një bashkësi joboshe e pajisur me veprimin binar të mbledhjes dhe veprimin ternar multiplikativ, e cila formon gjysmëgrup komutativ lidhur me mbledhjen dhe gjysmëgrup ternar lidhur me shumëzimin, që është shpërndarës lidhur me mbledhjen. Disa veti të gjysmëunazave ternare janë studiuar kohët e fundit nga T. K. Dutta dhe Sukhendu Kar. Në disertacion evidentojmë veti të tjera të tyre.

Objekt i studimit tonë janë gjithashtu heap-et si struktura algjebrike me një veprim ternar të ndërthurura me lloje grupoidesh. Disa veti të tyre janë studiuar, duke futur nga ana jonë kuptimet e veprimit ternar nga shumëzimi, të heap-it nga shumëzimi dhe të ternargrupoidit. Zbulimet e para të një heap-teorie algjebrike gjenden në punimin e K. Suskevc (Teorija obobscenih grup, 1937), H. Prufer (Theorie der abrelschen gruppen, 1924). Një studim më serioz për heap-et, semiheap-et dhe strukturat heaps të gjeneralizuara u bë nga V.V. Vagner.

Në interesin tonë nga ana tjetër ka qenë edhe plani projektiv. Origjina e gjeometrisë projektive është e lidhur me veprën e matematicienit dhe artistit francez Girard Desargues (1591-1666). Ajo mori një zhvillim të gjërë në gjysmën e parë të shekullit XIX, që sidoqoftë duhet parë si një fazë ndërmjetëse midis gjeometrisë analitike me fillimet në shekullin XVII dhe gjeometrisë algjebrike zhvilluar gjatë shekullit XX, që ka sot një rol krucant në zhvillimet e matematikës bashkëkohore. Një zhvillim i vrullshëm i saj nis në vitet 30. Në vitin 1938 O. Veblen përmblodhi konceptet bazë mbi gjeometrinë projektive. Në vitin 1957 E. Artin studioi algjebrat gjeometrike. Duke shfrytëzuar nocionet themelore të strukturave algjebrike ai bën interpretimin e tyre në planet afine dhe projektive. Në punimet e tij është për tu përmendur ndërtimi i gjeometrive ortogonale me ndihmën e hapësirave vektoriale. Në vitin 1961 H.S.M.Coxeter thelloi studimet mbi planet projektive reale. Në vitin 1962 P.Scherk paraqiti teoremat fundamentale të gjeometrisë afine ndërsa në vitin 1963 A. Heyting studijoi aksiomatikën e gjeometrisë projektive. Në vitin 1973 D. Hughes, dhe F. Piper dhanë një kontribut të veçantë në studimin e vetive algjebrike të strukturave ternare dhe vetive gjeometrike të planeve projektive, duke zbuluar një lidhje midis tyre. Një studim më i thellë mbi planet afine dhe projektive u krye në vitet 1975 dhe 1978 nga G. Pickert, W. Bos dhe G.Wolff, ndërsa në vitin 1995 këtë hulumtim e vazhdoi M. K. Bennett. Vitet e fundit edhe matematicienë të tjerë janë marrë me studimin e problemeve që lidhen me gjeometritë e fundme dhe aplikimet e tyre.

Strukturat algjebrike dhe gjeometria algjebrike gjejnë sot aplikime me spektër të gjërë në shumë disiplina si fizika teorike, shkencat kompjuterike, shkencat inxhinierike, shkencat e informacionit, teoria e kodimit, hapësirat topologjike e tj. Kjo ka motivuar mjaftueshëm hulumtuesit për kërkime të ndryshme në këto fusha, përfshirë edhe zbulimin e lidhjeve reciproke ndërmjet tyre. Në këtë kontekst, hartimi i këtij disertacioni ka si qëllim ***zbulimin e lidhjeve të tjera midis teorisë së strukturave algjebrike ternare dhe teorisë së planeve afine e projektive të paraqitura në trajtë modelesh, që mund të gjejnë aplikime në disiplinat e mësipërme.***

Disertacioni përbëhet nga pesë krerë.

Në kreun e parë, duke futur kuptimin e veprimit *n*-sh mbi një bashkësi joboshe, ndalemi në veprimin ternar dhe në përkufizimin e vetive të tij fundamentale. Më tej definojmë strukturën algjebrike ternare si rast i veçantë i një strukture algjebrike. Ndër strukturat ternare ndalemi tek gjysmëgrupi ternar si një strukturë ternare (*B*, *t*), ku *t* është shoqërues dhe tek gjysmëunaza ternare si strukturë algjebrike që përbëhet nga bashkësia joboshe *B*, e pajisur me veprimin binar të mbledhjes dhe shumëzimin ternar *t*, e cila formon gjysmëgrup komutativ lidhur me mbledhjen, gjysmëgrup ternar lidhur me shumëzimin ternar, shumëzim i cili është shpërndarës lidhur me mbledhjen. Krahas gjysmëunazës ternare $\mathbb{Z}^{-}$ të numrave të plotë negativ kemi ndërtuar edhe disa shembuj të tjerë mbi këto struktura. Duke i plotësuar edhe me veti të tjera këto struktura algjebrike ternare, përgatisim terenin për të konstatuar më tej lidhjen e tyre me veti gjeometrike në plane afine dhe projektive.

Në kreun e dytë duke u nisur nga fakti që planet afine dhe projektive janë struktura të incidencës që plotësojnë aksioma të caktuara, në fillim japim disa shembuj strukturash incidence të pafundme dhe të fundme, në atë numër dhe gjeometrinë e fundme Fano. Më tej formulojmë dhe vërtetojmë disa pohime të rëndësishme, që lidhen me kuptimet e fuqive të pikave dhe të blloqeve, me kuptimin e nënstrukturës së një strukture incidence, me strukturën duale të një strukture të dhëne, me matricën e një strukture incidente të fundme. Ndalemi pastaj në aksiomatikën e planit afin, lidhur me të cilën formulojmë dhe vërtetojmë disa pohime të rendësishme, sidomos për një plan afin të fundëm ku vërtetojmë se *në të çdo drejtëz përmban numër të njejtë n pikash dhe nëpër çdo pikë kalon numër i njejtë n*+1 *drejtëzash.* Krahas planit afin, japim aksiomatikën e planit projektiv, dhe rendisim disa pohime esenciale që rrjedhin prej saj, në qendër të të cilave është Teorema e Desargut dhe konfiguracioni përkatës.

Si ilustrim i shëndrimit të parë sjellim planin e fundëm projektiv Fano, i cili kalon në plan afin , mbasi largohen prej tij një drejtëz dhe pikat e saj.

Kreu 3 e nisim nga koordinatizimi i planit afin, i domosdoshëm për ndërtimin në të e një unaza ternare planare (S, t), që përbën modelin e një unaze të zakonshme associative

$(S,+,\cdot)$. Për këtë, në një plan afin $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) të koornatizuar nga një sistem koordinativ (O, I, OX, OY, OI) dhe nga një bijeksion $\sigma:\mathcal{P}_u \to S$, përcaktohet një veprim ternar $t:S^3 \to S$, që e quajmë veprim ternar planar. Vërtetojmë që çdo plan afin i koordinatizuar $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) përcakton një unazë ternare planare (S, t), ku S është bashkësia e koordinatave të planit afin dhe t është veprimi ternar planar në të dhe anasjelltas. Përcaktojmë dhe veprimet binare të mbledhjes dhe të shumëzimit në S dhe nënvizojmë relacionet $a+b=t(a,1,b)$, $a\cdot b=t(a,b,0)$. Pasi plotësohet plani afin me aksiomën e parë D1 të Desargut, lidhur me strukturën $(S,+,\cdot)$ në atë plan, shqyrtimi i disa izomorfizmave sjell përfundimin që $(S,+)$ është grup abeljan. Në vazhdim tregohet se kur në një plan afin të koordinatizuar, veç D1 vlen dhe aksioma e dytë D2 e Desargut, atëherë ***unaza ternare planare e tij*** (S,t) ***është modeli i një unaze të zakonshme associative*** $(S,+,\cdot)$**.**

Në kreun e katërt synimi ynë është që të tregojmë se bashkësia $\mathcal{A}=\{P\in\mathcal{P}| P \,\mathrm{I}\, \ell$, $P\neq J\}$ e pikave të drejtëzës ℓ të një plani projektiv të fundëm $\mathcal{P}$, e pajisur me një veprim aditiv binar dhe me një veprim multiplikativ ternar, formon gjysmëunazë ternare gjysmësubtraktive dhe regulare. Duke përdorur teoremën e Desargut për vërtetimin e disa teoremave, arrijmë në përfundimin që kjo strukturë ternare është ***modeli i një gjysmëunaze ternare gjysmësubtraktive dhe regulare në një plan projektiv të fundëm.***

Në kreun e pestë kemi futur disa veti të rëndësishme algjebrike të heaps strukturave, Ward grupoideve dhe grupoideve subtraktive si struktura ternare. Me fjalë të tjera, këtu studijohen disa veti të heap-eve si struktura algjebrike me një veprim ternar të ndërthurura me lloje grupoidesh, duke futur kuptimet e veprimit ternar nga shumëzimi, të heap-it nga shumëzimi dhe të ternargrupoidit. Krahas tyre studiohen koncepte të tilla si paralelogram-hapësira, sistemi i Desargut dhe sistemi i plotësuar i Desargut që kanë në themel relacione kuaternare. Në këtë kontekst, vërtetojmë që në të njëjtën bashkësi ekzistenca e një heapi komutativ anësor, ekzistenca e një paralelogram-hapësire, ekzistenca e një sistemi të plotësuar të Desargut si dhe ekzistenca e një grupoidi subtraktiv janë ekuivalente me njëra tjetrën.

Shikuar nga ky këndvështrim kemi ndërtuar një ***model të një heapi komutativ anësor në një plan afin të Desargut.***

PUBLIKIME DHE PJESËMARRJE NË KONFERENCA SHKENCORE

1. **SADIKI F., KAMBERI D.,** "*Ternary rings and projective planes*", The scientific bulletin UNIEL PROCEEDINGS 2008/3. Second International

   Conference of Algebra and functional Analysis PROCEEDINGS 2008.

2. **SADIKI F.,** "*A generalization of planar ternary rings*", Third International Conference of Algebra and Functional Analysis, PROCEEDINGS 2009.

3. **SADIKI F., IBRAIMI A.,** "*Relation between properties of Ternary Semirings and Projective Planes*", International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012 (vol.80 Issue. 1 p.1-15).

4. **SADIKI F., FILIPI K.,** "*Corresponding Characterisation of Desargues Systems and Heaps*" 3-rd International Euroasian Conference on Mathematical Sciences and Applications - Vienna, 2014.

5. **SADIKI F., FILIPI K.,** "*Një interpretim në planin e Desargut i një unaze ternare planare si unazë e zakonshme*", Konferenca ndërkombëtare e Shkencave Natyrore, Alb Shkenca Prishtinë, 2014.

6. **SADIKI F, FILIPI K.,**" *Regular Ternary Semirings with Semi-Subtractive Properties and their Interpretation in Projective Planes*", International Journal of Mathematical Sciences, Recent Science Publications, ISSN:2051-5995, Vol 33, Issue 2.p.1356-1368, 2013.

7. **SADIKI F., FILIPI K.,** "*Some properties of laterally commutative heaps. Construction of such heaps in Desargues plane*", International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications (IJMSEA), ISSN 0973-9424, Vol. 8 No. VI, pp.9-17, 2014.

KREU 1.

STRUKTURA ALGJEBRIKE TERNARE DHE VETI TË TYRE

Në këtë Kre, duke futur kuptimin e veprimit *n*-sh mbi një bashkësi joboshe, ndalemi në veprimin ternar dhe në përkufizimin e vetive të tij fundamentale. Më tej definojmë strukturën algjebrike ternare si rast i veçantë i një strukture algjebrike. Ndër to, përkufizojmë gjysmëgrupin ternar, gjysmëunazën dhe unazën ternare, duke i plotësuar edhe me veti të tjera këto struktura.

1.1. Përkufizimi i veprimit ternar dhe veti të tij

Le të jetë B një bashkësi jo boshe.

Përkufizim 1.1.1 [1] *Veprim n-sh mbi bashkësinë B quhet çdo pasqyrim* $\omega\colon\ B^n \to B$*, ku n është një numër natyror*.

Le të jetë A një nënbashkësi joboshe e B. [1] Nënbashkësia A quhet nënbashkësi *e qëndrueshme e B në lidhje me veprimin* ω dhe ky fakt shënohet $A \overset{\omega}{\subset_q} B$, në qoftë se $\forall\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$, $\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. Le të jetë A nënbashkësi e qëndrueshme e B në lidhje me veprimin n-sh ω. I lidhim çdo sistemi të radhitur $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ elementin $\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. Përcaktohet në këtë mënyrë një pasqyrim $\omega_i : A^n \to A$, d.m.th. një veprim algjebrik n-sh në A, i ndryshëm nga veprimi ω në B, të cilin do ta quajmë *veprim të induktuar nga* ω *në A*. Kur nuk ka keqkuptime, të dy këto veprime shënohen me të njëjtin simbol.

Veprimi n-sh mbi B për n=3 emërtohet veprim *ternar* (tresh). Pra, një veprim ternar në bashkësinë B është një pasqyrim $t\colon B^3 \to B$.

Përkufizojmë disa veti të tij.

Përkufizim 1.1.2 *Veprimi ternar* t *quhet*

(i) *ndërrues (komutativ) në B, në qoftë se* $\forall\ a, b, c \in B$,

$$t(a,b,c)=t(b,a,c)=t(b,c,a)=t(a,c,b)=t(c,a,b)=t(c,b,a); \qquad (1)$$

(ii) *ndërrues në mënyrë anësore në B, në qoftë se* $\forall\ a, b, c \in B$,

$$t(a,b,c)=t(c,b,a).$$

POHIM 1.1.1 ***Në qoftë se*** $\forall\ a, b, c \in B$, $t(a,b,c)=t(b,a,c)=t(b,c,a)$***, atëherë veprimi ternar t në B është komutativ.***

Vërtetim. Le të kemi $t(a, b, c)= t(b, a, c)= t(b, c, a)$, $\forall\ a, b, c \in B$. Në këto kushte, për të treguar se veprimi t është komutativ, sipas (1), mjafton të tregojmë se vlejnë barazimet $t(a,b,c)= t(a,c,b)= t(c,a,b)= t(c,b,a)$. Nga $t(b, a, c) = t(b, c, a)$, për $b=a, a=b, c=c$ kemi $t(a,b,c) = t(a,c,b)$, kurse nga $t(a, b, c) = t(b, a, c)$, për $a = a, b = c, c = b$ kemi $t(a,c,b) = t(c,a,b)$. Gjithashtu nga $t(b, a, c) = t(b, c, a)$, për $b = c, a = b, c = a$, kemi $t(c,b,a) = t(c,a,b)$. Si përfundim marrim $t(a,b,c)=t(a,c,b)=t(c,a,b)=t(c,b,a)$.

Përkufizim 1.1.3. *Veprimi ternar t quhet shoqërues (associativ) në B, në qoftë se*

$$\forall a,b,c,d,e \in B,\ t(t(a,b,c), d, e)= t(a, t(b,c,d), e)= t(a, b, t(c,d,e)) \qquad (2)$$

POHIM 1.1.2. ***Në qoftë se veprimi ternar*** $t : B^3 \to B$ ***përcaktohet nga***

$$t(x, y, z) = (x \otimes y) \otimes z \text{ për çdo } x, y, z \in B, \qquad (3)$$

ku $\otimes$ ***është një veprim binar shoqërues në B, atëherë edhe veprimi ternar t është shoqërues në B***.

Vërtetim. Veprimi binar $\otimes$ në B është associativ, prandaj

$$\forall x,y, z \in B,\ (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z). \qquad (4)$$

Prej këndej, sipas (3), kemi gjithashtu $t(x, y, z) = x \otimes (y \otimes z)$. Prandaj, nga (3) dhe (4), kemi

$$\begin{aligned} t(t(a,b,c), d, e) &= (t(a,b,c) \otimes d) \otimes e \\ &= ((a \otimes (b \otimes c)) \otimes d) \otimes e \\ &= (a \otimes ((b \otimes c) \otimes d)) \otimes e \\ &= a \otimes (((b \otimes c) \otimes d) \otimes e) \\ &= a \otimes (t(b,c,d) \otimes e) \end{aligned}$$

$$= t(a, t(b,c,d), e) .$$

Më tej, sipas barazimit të fundit:

$$\begin{aligned} t(a, t(b,c,d), e) &= a\otimes(t(b,c,d)\otimes e) \\ &= (a\otimes((b\otimes c)\otimes d))\otimes e \\ &= (a\otimes(b\otimes(c\otimes d)))\otimes e \\ &= ((a\otimes b)\otimes(c\otimes d))\otimes e \\ &= (a\otimes b)\otimes((c\otimes d)\otimes e) \\ &= (a\otimes b)\otimes t(c,d,e) \\ &= t(a, b, t(c,d,e)). \end{aligned}$$

Si përfundim marrim: $\forall\, a, b, c, d, e \in B$,

$$t(t(a,b,c), d, e) = t(a, t(b,c,d), e) = t(a, b, t(c,d,e)).$$

Përkufizim 1.1.4 *Veç t le të jetë futur në B edhe mbledhja binare +. Veprimi ternar t quhet shpërndarës (distributiv) në lidhje me + në B, në qoftë se*

$$\begin{aligned} &\forall a,b,c,d \in B, \\ &\quad t((a+b),c,d) = t(a,c,d) + t(b,c,d); \\ &\quad t(a,(b+c),d) = t(a,b,d) + t(a,c,d); \\ &\quad t(a,b,(c+d)) = t(a,b,c) + t(a,b,d). \end{aligned} \tag{5}$$

1.2. Struktura algjebrike ternare

Në terminologjinë e [1], strukturë algjebrike (ose algjebër ose Ω-algjebër) quhet çifti i radhitur (B, Ω), ku B është një bashkësi joboshe e quajtur bashkësia mbështetëse e strukturës dhe Ω është bashkësi veprimesh në B.

Në qoftë se $\Omega=\{\top, \perp, ...\}$, strukturën ($B$, Ω) e shënojmë (B, $\top$, $\perp$,...). Le të jetë A një nënbashkësi e qëndrueshme e B në lidhje me veprimet $\top$, $\perp$, ... Le të jenë gjithashtu $\top_i$, $\perp_i$, ... veprimet e induktuara përkatësisht nga $\top$, $\perp$, ... në A. Struktura algjebrike (A, $\top_i$, $\perp_i$, ...) me mbështetëse A quhet *nënstrukturë* e strukturës (B, $\top$, $\perp$, ...). Meqenëse, siç thamë më lart, për veprimet e induktuara përdoren simbolet e veprimeve fillestare përkatëse, nënstruktura e mësipërme shënohet zakonisht $(A, \top, \perp, \ldots)$.

Shpesh, kur njihen veprimet e strukturës, ajo shënohet thjesht me shkronjën e bashkësisë mbështetëse.

Përkufizim 1.2.1 *Struktura algjebrike* $(B, \top, \perp, \ldots)$ *quhet ternare, në qoftë se njëri nga veprimet mbi të është veprim ternar.*

Duket menjëherë se janë të vërteta pohimet:

POHIM 1.2.1 ***Në qoftë se një veprim ternar t është ndërrues (shoqërues) në strukturën $(B, \top, t, \ldots)$, atëhere ai është i tillë edhe në nënstrukturën e saj $(A, \top, t, \ldots)$.***

POHIM 1.2.2 ***Në qoftë se një veprim ternar t është shpërndarës në lidhje me një veprim dysh $\top$ në strukturën $(B, \top, t, \ldots)$, atëhere ai është i tillë në lidhje me veprimin $\top$ edhe në nënstrukturën e saj $(A, \top, t, \ldots)$.***

1.3. Gjysmëgrupi ternar

Përkufizim 1.3.1 [2] *Le të jetë B një bashkësi jo boshe dhe t një veprim ternar në B. Gjysmëgrup ternar quhet struktura ternare (B, t), ku t është shoqërues.*

POHIM 1.3.1 ***Në qoftë se grupoidi $(B, \otimes)$ është një gjysmëgrup dhe shumëzimi ternar $t: B^3 \to B$ përcaktohet nga*** (3), ***atëherë (B, t) është gjysmëgrup ternar***.

Vërtetim. Në gjysmëgrupin $(B, \otimes)$ veprimi binar $\otimes$ është associativ, prandaj, sipas Pohimit 1.2, edhe veprimi ternar t është i tillë. Për pasojë (B, t) është gjysmëgrup ternar.

Përkufizim 1.3.2 *Një element e i gjysmëgrupit ternar (B, t) quhet*

(i) *element asnjanës i majtë, në qoftë se* $\forall x \in B$, $t(e,e,x)=x$;

(ii) *element asnjanës i djathtë, në qoftë se* $\forall x \in B$, $t(x,e,e)=x$;

(iii) *element asnjanës anësor, në qoftë se* $\forall x \in B$, $t(e,x,e)=x$;

(iv) *element bi- asnjanës, në qoftë se* $\forall x \in B$, $t(e,e,x)=t(x,e,e)=x$;

(v) *element asnjanës, në qoftë se* $\forall x \in B$, $t(e,e,x)=t(e,x,e)=t(x,e,e)=x$.

Shembull 1.3.1 [3] Le të jetë $\mathbb{Z}^-$ bashkësia, e përbërë nga numri zero dhe të gjithë numrat e plotë negativ, e pajisur me veprimin ternar [ ]: $(\mathbb{Z}^-)^3 \to \mathbb{Z}^-$, përcaktuar nga [xyz] =(x·y)·z, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^-$, ku · është shumëzimi i zakonshëm në $\mathbb{Z}^-$. Është e qartë se ($\mathbb{Z}^-$, [ ]) formon gjysmëgrup ternar me element asnjanës -1, sepse, duket lehtë se, për çdo $x \in \mathbb{Z}^-$, (-1)(-1)x=(-1)x(-1)=x(-1)(-1)=x .

Shembull 1.3.2 Le të jetë (B, ·) një gjysmëgrup binar. Struktura ternare (B, t), ku veprimi ternar t përcaktohet nga $t(x, y, z) = xyz$ *për çdo* $x, y, z \in B$, sipas Pohimit 1.1.2, është gjysmëgrup ternar.

Përkufizim 1.3.3 *Një gjysmëgrup ternar* (B, t) *quhet komutativ, në qoftë se veprimi t është komutativ.*

Nga Pohimi 1.1.1 del ky

POHIM 1.3.1 ***Në qoftë se*** $\forall a, b, c \in B$, $t(a,b,c)=t(b,a,c)=t(b,c,a)$, ***atëherë gjysmëgrupi ternar*** (B, t) ***është komutativ.***

Përkufizim 1.3.4. [4] *Një gjysmëgrup ternar* (B, t) *quhet*

(i) *i thjeshtueshëm nga e majta* (LC), *në qoftë se* $\forall a, b, x, y \in B$,

$t(a,b,x)=t(a,b,y) \Rightarrow x=y;$

(ii) *i thjeshtueshëm nga e djathta* (RC), *në qoftë se* $\forall a, b, x, y \in B$,

$t(x,a,b)=t(y,a,b) \Rightarrow x=y;$

(iii) *i thjeshtueshëm në mënyrë anësore* (LLC), *në qoftë se* $\forall a, b, x, y \in B$,

$t(a,x,b)=t(a,y,b) \Rightarrow x=y;$

(iv) *i thjeshtueshëm, në qoftë se* (B, t) *është njëherësh LC, RC dhe LLC.*

Përkufizim 1.3.5. [5] *Në gjysmëgrupin ternar* (B, t) *një element* $a \in B$ *quhet invertibël, në qoftë se ekziston një element* $b \in B$ *i tillë që* $\forall x \in B$, $t(a,b,x)=t(b,a,x)=t(x,a,b)=t(x,b,a)=x$. *Në këtë rast elementi b quhet invers i elementit a.*

Përkufizim 1.3.6. *Në gjysmëgrupin ternar* (B, t) *një element* $a \in B$ *quhet i rregullt* (*regular*), *në qoftë se ekziston një element* $b \in B$ *i tillë që* $t(a,b,a)=a$.

Në qoftë se të gjitha elementet e B janë të rregullt, atëherë gjysmëgrupi ternar B quhet *i rregullt.*

POHIM 1.3.2. ***Në një gjysmëgrup ternar B çdo element invertibël në të është i rregullt.***

Vërtetim. Le të jetë a një element invertibël në B. Sipas Përkufizimit 1.3.5, ekziston inversi i tij $b\in B$ i tillë që $\forall\, x\in B$, $t(a,b,x)=t(b,a,x)=t(x,a,b)=t(x,b,a)=x$. Nga barazimi i fundit për $x=a$ marrim $t(a,b,a)=a$. Kjo tregon, sipas Përkufizimit 1.3.6, se a është element i rregullt në B.

1.4. Gjysmëunaza ternare dhe veti të saj

Përkufizim 1.4.1. [6] *Gjysmëunazë ternare quhet struktura ternare* (B, +, t), *ku + është një mbledhje binare në B, e cila ka vetitë:*

1. (B , +) *është gjysmëgrup komutativ;*
2. (B , t) *është gjysmëgrup ternar;*
3. *veprimi ternar t është shpërndarës lidhur me +.*

Në qoftë se (B, +) *është grup komutativ, atëherë gjysmëunaza ternare* (B, +, t) quhet *unazë ternare.*

Shënim. Shpesh në një strukturë algjebrike ternare (B, +, t) , ku + është një mbledhje binare në B, veprimi ternar t emërtohet *shumëzim ternar* dhe shënohet me simbolin [ ], duke i dhënë shembëllimit $t(x, y, z)$ të treshes së çfarëdoshme $(x, y, z)\in B^3$ trajtën $[xyz]$. Me fjalë të tjera, në strukturën algjebrike ternare (B, +, [ ]) veprimi ternar është shumëzimi ternar [ ] me shembëllim $[xyz]$ për çdo $(x, y, z)\in B^3$.

Në këto kushte, Përkufizimi 1.4.1 formulohet: Gjysmëunazë ternare quhet struktura ternare (B, +, [ ]), e cila ka vetitë:

1. (B , +) është gjysmëgrup komutativ;
2. (B , [ ]) është gjysmëgrup ternar;
3. veprimi [ ] është shpërndarës lidhur me +,

që, sipas (5) , do të thotë se $\forall a, b, c, d\in B$, vlejnë barazimet

$$\begin{aligned}
[(a+b)cd] &= [acd] +[bcd],\\
[a(b+c)d] &= [abd] +[acd],\\
[ab(c+d)] &= [abc] +[abd].
\end{aligned} \tag{6}$$

Përkufizim 1.4.2. *Gjysmëunaza ternare* (B, +, [ ]) *thuhet se është komutative*

(*komutative në mënyrë anësore*), *në qoftë se i tillë është gjysmëgrupi* (B, [ ]).

POHIM 1.4.1. ***Në qoftë se gjysmëunaza ternare*** (B, +, [ ]) ***është komutative, atëherë në të vlen gjithashtu*** $[abc]=[acb]=[cab]=[cba],\ \ \forall a,b,c\in B.$

Vërtetim. Nga fakti që (B, +, [ ]) është komutative kemi $[abc]=[bac]=[bca]$, $\forall a,b,c\in$ B. Nga $[bac]=[bca]$, *për* $b=a, a=b, c=c$ kemi

$[abc]=[acb]$, kurse nga $[abc]=[bca]$, për $a=a, b=c, c=b$, kemi $[acb]=[cba]$. Gjithashtu nga $[bac]=[bca]$, për $b=c, a=b, c=a$, kemi $[cba]=[cab]$. Ndryshe, $\forall a,b,c\in B$, $[abc]=[bac]=[bca]\Rightarrow[abc]=[acb]=[cba]=[cab]$, që do të thotë se një gjysmëunazë ternare B është komutative së bashku me gjysmëgrupin ternar (B, [ ]).

Përkufizim 1.4.3. *Struktura ternare* (B, +, [ ]) *le të ketë* 0 (*element zero*) *në lidhje me* +. *Ai quhet zero ternare në* B, *në qoftë se* $\forall\, x, y\in B$, $[0xy]=[x0y]=[xy0]=0$.

Në qoftë se gjysmëunaza ternare (B, +, [ ]) ka zero ternare, atëherë thuhet se ajo është *gjysmëunazë ternare me zero* [6]**.**

Shembull 1.4.1. Le të jetë $\mathbb{Z}^-$ bashkësia, e përbërë nga numri zero dhe të gjithë numrat e plotë negativ, e pajisur me veprimet e zakonshme binare + të mbledhjes, $\cdot$ të shumëzimit dhe me shumëzimin ternar [ ]: $(\mathbb{Z}^-)^3 \to \mathbb{Z}^-$, përcaktuar nga $[xyz]=x\cdot y\cdot z$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}^-$. Nga përkufizimet e mësipërme del e qartë se ($\mathbb{Z}^-$, +, [ ]) formon gjysmëunazë ternare komutative me zero.

Shembull 1.4.2. Le të jetë $M_n(\mathbb{Z}^-)$ bashkësia e matricave katrore të rendit n me elemente nga $\mathbb{Z}^-$, e pajisur me veprimet e zakonshme binare + të mbledhjes, $\cdot$ të shumëzimit të matricave si dhe me shumëzimin ternar $[\ ]:(M_n(\mathbb{Z}^-))^3\to M_n(\mathbb{Z}^-)$, përcaktuar nga $[ABC]=A\cdot B\cdot C$, $\forall A,B,C\in M_n(\mathbb{Z}^-)$. Nga më sipër është e qartë se ($M_n(\mathbb{Z}^-)$, +, [ ]) formon gjysmëunazë ternare komutative me zero.

Shembulli 1.4.3. Le të jetë $\boldsymbol{N}$ bashkësia e numrave të plotë jonegativ dhe $\mathcal{F}$ bashkësia e pasqyrimeve $f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ përcaktuar nga $f(x)\in x^{n_f}$ për çdo $x\in\boldsymbol{N}$, ku $n_f\in\boldsymbol{N}$, d.m.th. $\mathcal{F}=\{\, f\in\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}} \mid f(x)\in x^{n_f},\ n_f\in\boldsymbol{N}\,\}$.

Përkufizojmë në $\mathcal{F}$ veprimin binar të mbledhjes si pasqyrim +: $\mathcal{F}^2\to\mathcal{F}$ përcaktuar nga $(f+g)(x) = x^{n_f+n_g}$ për çdo $f,g\in\mathcal{F}$.

Vemë re se $(f+g)(x) = f(x)\ \ g(x)$. Prej kendej, ($\mathcal{F}$, +) rezulton gjysmëgrup komutativ më zero, sepse

1. $\forall\, f,g,h\in\mathcal{F}$, $[f+(g+h)](x) = [(f+g)+h)](x) \Rightarrow f+(g+h) = (f+g)+h$;

2. $\forall$ $f,g\in \mathcal{F}$, $(f+g)(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f+g = g+f$;

3. Shënojmë 0 pasqyrimin në $\mathcal{F}$ përcaktuar nga $0(x)=x^0$ =1 për çdo $x\in$ $\boldsymbol{N}$ (pranojmë 0^0 =1). Atëherë, $(0+f)(x) = x^{0+n_f} = x^{n_f} = f(x) \Rightarrow 0+f=f$. Po ashtu $f+0=f$.

Përkufizojmë në $\mathcal{F}$ edhe shumëzimin ternar [ ]:$\mathcal{F}^3\to\mathcal{F}$ përcaktuar nga $[fgh](x) = x^{n_f n_g n_h}$ për çdo $f,g,h\in\mathcal{F}$, në lidhje me të cilin ka vend vetia e shoqërimit: $\forall f,g,h,j,k\in\mathcal{F}$, $[[fgh]jk](x)=x^{n_{fgh}\cdot n_j\cdot n_k}=x^{(n_f\cdot n_g\cdot n_h)\cdot n_j\cdot n_k}=x^{n_f\cdot(n_g\cdot n_h\cdot n_j)\cdot n_k}=x^{n_f\cdot n_{ghj}\cdot n_k}=[f[ghj]k](x)$, që tregon se $[[fgh]jk]=[f[ghj]k]$. Njëlloj do të merret $[[fgh]jk]=[fg[hjk]]$.

Për rrjedhojë ($\mathcal{F}$, [ ]) është gjysmëgrup ternar.

Vlejnë gjithashtu vetitë distributive të shumëzimit ternar lidhur me mbledhjen: $[(f+g)hj](x)=x^{n_{f+g}\cdot n_h\cdot n_j}=x^{(n_f+n_g)\cdot n_h\cdot n_j}=x^{n_f\cdot n_h\cdot n_j+n_g\cdot n_h\cdot n_j}=x^{n_f\cdot n_h\cdot n_j}\cdot x^{n_g\cdot n_h\cdot n_j}=[fhj](x)+[ghj](x)$. Kjo sjell $[(f+g)hj]=[fhj]+[ghj]$, $\forall f,g,h,j\in\mathcal{F}$. Njëlloj do të merren:

$$[f(g+h)j]=[fgj]+[fhj] \text{ dhe } [fg(h+j)]=[fgh]+[fgj],\forall f,g,h,j\in\mathcal{F}.$$

Veç sa më sipër kemi akoma:

$\forall f,g\in\mathcal{F}$, $[0fg] = 0$, sepse $[0fg](x)=x^{0\cdot n_f\cdot n_g}=x^0=0(x)$; $[f0g] = 0$, sepse $[f0g](x)=x^{n_f\cdot 0\cdot n_g}=x^0=0(x)$; gjithashtu $[fg0]=0$, sepse $[fg0](x)=x^{n_f\cdot n_g\cdot 0}=x^0=0(x)$.

Si përfundim ($\mathcal{F}$, +, [ ]) është gjysmëunazë ternare me zero.

Përkufizim 1.4.4. *Elementi* $a\in B$ *quhet i rregullt në gjysmëunazën ternare* (*B*, +, [ ]), *në qoftë se është i tillë në gjysmëgrupin ternar* (*B*, [ ]). *Gjysmëunaza ternare* (*B*, +, [ ]) *quhet e rregullt, në qoftë se të gjitha elementet e saj janë të rregullt.*

Përkufizim 1.4.5. [2] *Gjysmëunaza ternare* (*B*, +, [ ]), *quhet e thjeshtueshme nga e majta* (*LC*), *e thjeshtueshme nga e djathta* (*RC*), *e thjeshtueshme në mënyrë anësore* (*LLC*), e *thjeshtueshme, në qoftë se i tillë është përkatësisht gjysmëgrupi ternar* (*B*, [ ]).

Përkufizim 1.4.6. *Gjysmëunaza ternare* (*B*, +, [ ]) *quhet gjysmësubtraktive*, *në qoftë se* $\forall a, b\in B$, $\exists x\in B$ *i tillë që a+x=b ose* $\exists y\in B$ *i tillë që b+y=a.*

POHIM 1.4.2. [6] ***Çdo unazë ternare është gjysmëunazë ternare gjysmësubtraktive.***

Vërtetim. Në qoftë se B është unazë ternare, atëherë (B, +) është grup. Prandaj për çdo dy elemente $a, b\in B$ ekziston $x=b-a$ (ose $y=a-b$) në B i tillë që $a+x=b$ (ose $b+y=a$).

Përkufizim 1.4.7. [7] *Gjysmëunaza ternare B thuhet se është pa pjesëtues të zeros në qoftë se ajo ka element* 0 *lidhur me mbledhjen dhe* $\forall a, b, c\in B$, $[abc]=0 \Rightarrow a=0$ *ose* $b=0$ *ose* $c=0$.

POHIM 1.4.3. ***Një gjysmëunazë ternare B me zero dhe e thjeshtueshme është pa pjestues të zeros***.

Vërtetim. Nga Përkufizimi 1.4.3 del që $\exists\ 0\in B$ lidhur me + dhe $\forall x, y\in B$, $0xy = x0y = xy0 = 0$. Prej këndej, duke qenë e thjeshtueshme B, marrim $[abc]=0 \Rightarrow [abc]=[0bc]$ $\Rightarrow a=0$.

POHIM 1.4.4. ***Në qoftë se gjysmëunaza ternare B pa pjestues të zeros është gjysmësubtraktive dhe e thjeshtueshme sipas +*, atëherë $\boldsymbol{\forall a, b, c, d\in B}$, ku $\boldsymbol{a\neq 0, b\neq 0}$ *vlejnë thjeshtimet***

(i) $\boldsymbol{[abc]= [abd] \Rightarrow c= d;}$

(ii) $\boldsymbol{[cab]= [dab] \Rightarrow c= d;}$

(iii) $\boldsymbol{[acb]= [adb] \Rightarrow c= d.}$

Vërtetim. Ndalemi në vërtetimin e implikimit të parë. Le të jenë elementet e çfarëdoshme $a, b, c, d\in B$, *ku* $a\neq 0$, $b\neq 0$ dhe $[abc]= [abd]$. Nga fakti që B është gjysmësubtraktive, për $c, d\in B, \exists x\in B$ i tillë që $c+x=d$ *ose* $\exists y\in B$ i tillë që $d+y=c$. Në qoftë se $c+x=d$, atëherë $[ab(c+x)]=[abd]$. Nga fakti që B është gjysmëunazë ternare, sipas (6), marrim

$[ab(c+x)]=[abd] \Rightarrow$

$[abc]+ [abx]= [abd] \Rightarrow$

$[abd]+ [abx]= [abd] \Rightarrow$

$[abx]=0$,

sepse B është e thjeshtueshme lidhur me +. Por B është dhe pa pjestues të zeros, prandaj kjo sjell $x=0$. Atëherë $c+x=d \Rightarrow c=d$. Njëlloj tregohet se kur $d+y=c$, përsëri kjo sjell $c=d$. Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe (ii), (iii).

Përkufizim 1.4.8. [6] *Një element a i gjysmëunazës ternare* (B, +, [ ]) *quhet invertibël në qoftë se ai është i tillë në gjysmëgrupin ternar* (B, [ ]).

POHIM 1.4.5. ***Në një gjysmëunazë ternare* (*B*, +, [ ]) *me zero dhe me* card *B* ≥2 *elementi* 0 *nuk është invertibël.***

Vërtetim. Nga fakti që card $B \geq 2$ në B ka të paktën një element $x \neq 0$. Supozojmë që 0 është invertible. Sipas Përkufizimit 1.3.5, ekziston një element $b \in B$ i tillë që $\forall x \in B$, $[0bx] = [b0x] = [x0b] = [xb0] = x$. Por, sipas Përkufizimit 1.4.3, kemi $[0bx] = 0$, që sjell $x = 0$.

Përkufizim 1.4.9. [4] *Gjysmëunaza ternare B me zero dhe me* card$B \geq 2$ *quhet gjysmëunazë ternare me pjestim, në qoftë se çdo element jozero nga B është invertibël.*

POHIM 1.4.6. ***Çdo gjysmëunazë ternare B me pjesëtim është gjysmëunazë ternare e rregullt***.

Vërtetim. Le të jetë a një element i çfarëdoshëm i gjysmëunazës ternare (B, +, [ ]) me pjesëtim . Në qoftë se $a=0$, nga fakti që 0 është zero ternare në B, kemi $0x0=0$ për çdo $x \in B$. Në qoftë se $a \neq 0$, nga fakti që është element invertibël në gjysmëunazën ternare (B, +, [ ]), sipas Përkufizimit 1.4.8, ai është i tillë në gjysmëgrupin ternar (B, [ ]). Sipas Pohimit 1.3.2 dhe Përkufizimit 1.4.4, ai rezulton i rregullt në gjysmëunazën ternare ternare B. Si përfundim ajo gjysmëunazë ternare është e rregullt.

1.5. Unaza ternare planare

Përkufizim 1.5.1. [8] *Le të jetë B një bashkësi, që ka të paktën dy elemente të ndryshme që shënohen* 0 (quhet zero) *dhe* 1 (quhet njësh) *si dhe t një veprim ternar në B. Unazë ternare planare quhet struktura ternare* (B, t), *që kënaq aksiomat e mëposhtëme:*

A1. $\forall\, a, m, b \in B$, $t(0, m, b) = t(a, 0, b) = b$.

A2. $\forall\, a \in B$, $t(a, 1, 0) = t(1, a, 0) = a$.

A3. $\forall\, m, m', b, b' \in B$, ku $m \neq m'$, $\exists! x \in B$, $t(x, m, b) = t(x, m', b')$.

A4. $\forall a, a', b, b' \in B$, $a \neq a'$, $\exists! (x,y) \in B^2$, $t(a, x, y) = b \wedge t(a', x, y) = b'$.

A5. $\forall a, m, c \in B$, $\exists! x \in B$, $t(a, m, x) = c$.

Vërejte. Nga Përkufizimi 1.4.1 më sipër del se një unazë ternare (B, +, t) është një gjysmëunazë ternare, në të cilën

1. (B , +) është grup komutativ;
2. veprimi ternar t është associativ;
3. veprimi ternar t është shpërndarës lidhur me +.

I formuluar në këtë trajtë ai është formalisht i ngjashëm me kuptimin e unazës së zakonshme të pajisur me dy veprime binare [1], gjë që justifikon emërtimin “unazë” ternare.

Duke e krahasuar me Përkufizimin 1.4.1, Përkufizimin 1.5.1 me aksiomat e veta nuk lë vend për justifikimin e përdorimit të termave “unazë ternare” për emërtimin e unazës ternare planare. Megjithatë ky emërtim e gjen justifikimin e vet në interpretimin e unazave ternare planare në gjeometrinë projektive plane. Në Kreun 3 arrihet në përfundimin se, për një përcaktim të përshtatshëm të veprimit ternar t, unaza ternare planare (B, t) shndërrohet në një unazë të zakonshme.

KREU 2

PLANE AFINE DHE PLANE PROJEKTIVE

Në këtë Kre japim kuptimet bazë të strukturave të incidencës, në theks të veçantë të planeve afine dhe projektive si struktura të tilla që plotësojnë aksioma të caktuara. Duke shfrytëzuar aksiomat e këtyre planeve vërtetojmë disa veti të rëndësishme, të cilat më tej krijojnë mundësinë e aplikimit të metodave të ndryshme për koordinatizimin e tyre.

2.1. Struktura e incidencës

Le të jenë bashkësitë $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}$, ku dy të parat janë joboshe.

Përkufizim 2.1.1. *Strukturë e incidencës (apo gjeometri) quhet treshja e radhitur* $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, *ku*

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \varnothing \,,\ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B} \tag{1}$$

Ndryshe, $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ është strukturë e incidencës në qoftë se $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ janë bashkësi të dallueshme (disjunkte) dhe $\mathcal{I}$ është një lidhje dyshe (binare) e bashkësisë $\mathcal{P}$ me bashkësinë $\mathcal{B}$, që quhet lidhje e incidencës. Elementet e bashkësisë $\mathcal{P}$ i quajmë *pika* dhe do t'i shënojmë me germa të mëdha të alfabetit, kurse ato të bashkësisë $\mathcal{B}$ i quajmë *blloqe* (ose drejtëza) dhe do ti shënojmë me germa të vogla të alfabetit. Si në çdo lidhje dyshe, faktin $(P, b) \in \mathcal{I}$ do ta shënojmë edhe $P\,\mathcal{I}\,b$ dhe do t'a lexojmë *pika P është incidente me bllokun b apo blloku b ka incidente pikën P.*

Si shembuj të strukturave të incidencës mund të marrim:

Shembulli 2.1.1. Le të jetë $\mathcal{P}$ bashkësia e pikave të një plani euklidian α, $\mathcal{L}$ bashkësia e drejtëzave të planit α dhe $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme $\in$ e pikës ndaj drejtëzës. Është e qartë se $(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ është një strukturë incidence, në të cilën çdo dy drejtëza të ndryshme kanë e shumta një pikë të përbashkët.

Shembull 2.1.2. Le të jetë $S= (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ një treshe e përcaktuar si më poshtë:

1. $\mathcal{P}$ është bashkësia e drejtëzave të hapësirës euklidiane, që kalojnë nga një pikë e fiksuar e saj, që e quajmë origjinë. Çdo drejtëz $P \in \mathcal{P}$ e quajmë pikë në S.

2. $\mathcal{B}$ është bashkësia e planeve të saj, që kalojnë nga origjina. Çdo plan $\ell \in \mathcal{B}$ e quajmë drejtëz në S.
3. $\mathcal{I}$ është e tillë që për çdo pikë $P \in \mathcal{P}$ dhe çdo drejtëz $\ell \in \mathcal{B}$ kemi

$$PI\ell \Leftrightarrow P \subset \ell.$$

Është e qartë se treshja $S=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence, ku çdo dy drejtëza të ndryshme të saj kanë e shumta një pikë të përbashkët.

Strukturë incidence është edhe treshja $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, ku $\mathcal{P}$ është bashkësia e pikave të hapësirës euklidiane, $\mathcal{B}$ është bashkësia e planeve të saj dhe $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme $\in$ e pikës ndaj planit, por në këtë strukturë dy drejtëza të ndryshme ndërpriten sipas një bashkësie të pafundme pikash (sipas një drejtëze të zakonshme të hapësirës euklidiane).

Shembull 2.1.3. Le të jetë $\mathcal{P}$ bashkësia e pikave të një sipërfaqeje sferike, $\mathcal{L}$ bashkësia e rrathëve të mëdhenj në të (ndërprerja me të e planeve që kalojnë nga qendra) dhe $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme $\in$ e një pike në një rreth të madh. Atëherë $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence, ku pikat janë pikat e zakonshme të sipërfaqes sferike dhe drejtëzat janë rrathët e mëdhenj. Në këtë gjeometri dy drejtëza të ndryshme ndërpriten në dy pika të ndryshme (Fig. 1).

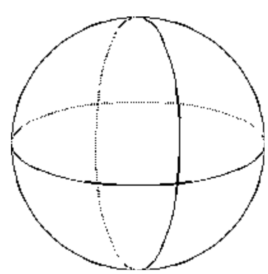

Fig. 1

Shembull 2.1.4. Le të jetë $\mathcal{P}$ një bashkësi e fundme me v elemente, të cilat i quajmë pika, $\mathcal{B}$ një familje me σ nënbashkësish jo boshe të $\mathcal{P}$, të cilat quajmë blloqe (ose drejtëza) dhe $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme $\in$ e elementit në bashkësi. Është e qartë se edhe kjo treshe ($\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}$) është një strukturë incidence.

Shembull 2.1.5. Në Fig. 2 janë dhënë shtatë pika dhe shtatë vija. Le të jetë $\mathcal{P}$ bashkësia e atyre shtatë pikave, $\mathcal{L}$ bashkësia e shtatë vijave dhe $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme $\in$ e një pike në një vijë. Është e qartë se ($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) është një strukturë incidence, ku pikat janë pikat e dhëna dhe drejtëzat janë vijat e dhëna në figurë. Në këtë gjeometri duket se çdo dy drejtëza të ndryshme ndërpriten në një pikë dhe çdo dy pika të ndryshme janë incidente me një drejtëz.

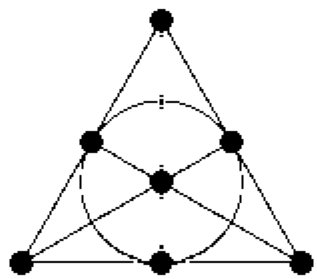

Fig. 2

Gjeometria me shtatë pika dhe shtatë drejtëza, ku çdo dy drejtëza të ndryshme ndërpriten në një pikë dhe çdo dy pika të ndryshme janë incidente me një drejtëz, njihet si *gjeometria Fano*. Nga më sipër, gjeometria e Fig. 2 është një gjeometri Fano. Të tilla janë dhe gjeometritë e paraqitura në Fig. 3.

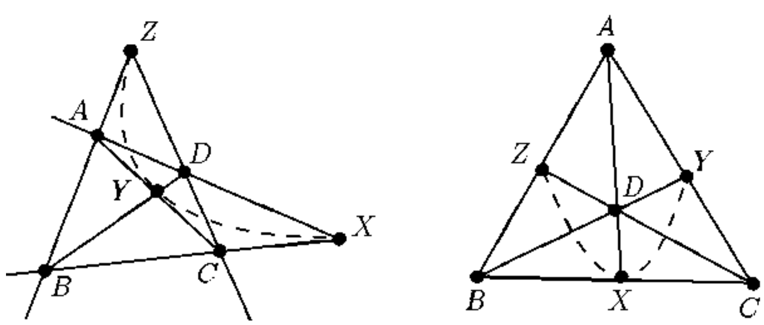

Fig.3

Në një gjeometri Fano ka saktësisht tri pika incidente në çdo drejtëz dhe tri drejtëza incidente në çdo pikë.

Një strukturë incidence quhet *e fundme*, në qoftë se bashkësia e nisjes dhe ajo e mbërritjes janë të fundme. Në të kundërt ajo quhet *e pafundme*.

Tre shembuj e pare janë struktura incidence të pafundme nga gjeometria euklidiane, kurse tek i katërti kemi një klasë gjeometrish të fundme. Edhe gjeometritë Fano tek i pesti janë gjeometri të fundme.

Përkufizim 2.1.2. [40] *Një strukturë incidence* $(\mathcal{P},\mathcal{B}, \mathcal{I})$ *quhet konfiguracion në qoftë se*:

1) çdo dy pika të ndryshme janë incidente të shumtën me një drejtëz;
2) çdo dy drejtëza të ndryshme janë incidente të shumtën me një pikë.

Nga Shembulli 2.1.3 duket menjëherë që gjeometria e pikave dhe e rrathëve të mëdhenj të një sipërfaqeje sferike nuk është një konfiguracion, kurse në Shembullin 2.1.5 gjeometria Fano është një konfiguracion, që quhet konfiguracioni Fano.

Le të jetë $A\subseteq\mathcal{P}$ një nënbashkësi pikash e strukturës së incidencës $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$. Shënojmë me $\mathcal{B}_A=\{b\in\mathcal{B} \mid P\mathcal{I}b, \forall P\in A\}$ bashkësinë e të gjithë blloqeve që janë incidente me të gjitha pikat e A. Për një pikë të veçuar $P\in\mathcal{P}$ bashkësia $\mathcal{B}_P=\{b\in\mathcal{B}| P\mathcal{I}b\}$ e blloqeve incidente me të quhet *përmbajtje* e pikës P, kurse kardinali i saj $card\ \mathcal{B}_P$ quhet *fuqi* e pikës P. Është e qartë se në qoftë se $A=\{P_1,P_2,...,P_k\}$, atëherë bashkësia e blloqeve incidente me pikat e nënbashkësisë A do të jetë $\mathcal{B}_A=\{b\in\mathcal{B}|P_i\mathcal{I}b,$ i=1, 2, …, k$\}=\{b\in\mathcal{B}|\ P_1\mathcal{I}b\}\ \cup \{b\in\mathcal{B}|\ P_2\mathcal{I}b\}\cup\cdots\cup\{b\in\mathcal{B}|\ P_k\mathcal{I}b\}$.

Le të jetë tani $B\subseteq\mathcal{B}$ një nënbashkësi blloqesh e strukturës së incidencës $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$. Shënojmë me $\mathcal{P}_B=\{P\in\mathcal{P}|P\mathcal{I}b, \forall b\in B\}$ bashkësinë e të gjitha pikave që janë incidente me të gjitha blloqet e B. Për një bllok të veçuar $b\in\mathcal{B}$ bashkësia $\mathcal{P}_b=\{P\in\mathcal{P}| P\mathcal{I}b\}$ e pikave incidente me atë bllok quhet *përmbajtje* e bllokut b, kurse kardinali i saj $card\ \mathcal{P}_b$ quhet *madhësi* (ose *fuqi*) e bllokut b. Blloqet që kanë përmbajtje të njejtë quhen *përsëritës*. Struktura $\mathcal{S}$ quhet *e thjeshtë* në qoftë se çdo dy blloqe të ndryshëm të saj kanë përmbajtje të ndryshme. Është e qartë se në qoftë se $B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$, atëherë bashkësia e pikave incidente me blloqet e nënbashkësisë B do të jetë $\mathcal{P}_B=\{P\in\mathcal{P}|P\mathcal{I}b_i,$ i=1, 2, …, k$\}=\{P\in\mathcal{P}|P\mathcal{I}b_1\}\cup\{P\in\mathcal{P}|P\mathcal{I}b_2\}\cup\cdots\cup\{P\in\mathcal{P}|P\mathcal{I}b_k\}$.

Në bashkësinë $\mathcal{B}$ të blloqeve të $\mathcal{S}$ përcaktojmë relacionin $\rho=\{(b, b')\in\mathcal{B}^2|\ \mathcal{P}_b=\mathcal{P}_{b'}\}$, i cili duket lehtë se është relacion ekuivalence. Kardinali i klasës së ekuivalencës

$b\rho = \{x \in \mathcal{B} | \; b\rho x\}$ të një blloku b quhet *shumëfishitet* i tij. Është e qartë se blloku b është përsëritës vetëm atëherë kur $card\; b\rho > 1$, kurse struktura $\mathcal{S}$ është e thjeshtë vetëm atëherë kur $\forall b \in \mathcal{B}$, $card\; b\rho = 1$. Krahas strukturës $\mathcal{S}$ ndërtojmë edhe një strukturë tjetër incidence me pika bashkësinë $\mathcal{P}$, me blloqe faktor-bashkësinë $\mathcal{B}/\rho$ dhe me relacion incidence $\mathcal{I}^{\rho}$, përcaktuar nga $P\mathcal{I}^{\rho} b\rho \Leftrightarrow P\mathcal{I}b$ për çdo $(P, b\rho) \in \mathcal{P} \times \mathcal{B}/\rho$, të cilën e shënojmë $\mathcal{S}/\rho$ dhe e quajmë strukture të *reduktuar* të strukturës $\mathcal{S}$. Struktura e reduktuar $\mathcal{S}/\rho = (\mathcal{P}, \mathcal{B}/\rho, \mathcal{I}^{\rho})$ e strukturës $\mathcal{S}$ është e thjeshtë.

Përkufizimi 2.1.3. *Struktura e incidences $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', \mathcal{I}')$ quhet nënstrukturë e strukturës $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ në qoftë se* $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ dhe $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$.

Për çdo pikë $P \in \mathcal{P}'$ dhe për çdo bllok $b \in \mathcal{B}'$ kemi: $(P, b) \in \mathcal{I}' \Leftrightarrow (P, b) \in \mathcal{I}$. Prandaj për incidencën $\mathcal{I}'$ themi se është indukuar nga $\mathcal{I}$. Ajo paraqet ngushtim të relacionit $\mathcal{I}$ në $\mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$, pra $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\;|_{P' \times B}$.

Përkufizimi 2.1.4. [8] *Struktura $\mathcal{S}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{I}^*)$ quhet strukturë duale e strukturës $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, në qoftë se $\mathcal{P}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{P}$ dhe $\mathcal{I}^* = \{(b, P) \in \mathcal{P}^* \times \mathcal{B}^* \,|(P,b) \in \mathcal{I}\}$.*

Shohim që $\mathcal{S}^*$ fitohet nga $\mathcal{S}$ duke i ndërruar rolet pikave dhe blloqeve, pra $\mathcal{S}^* = (\mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{I}^*)$. Shihet qartë se $(\mathcal{S}^*)^* = \mathcal{S}$, d.m.th. dualja e strukturës duale $\mathcal{S}^*$ është vetë $\mathcal{S}$. Në qoftë se në një pohim të strukturës së incidencës i ndrrojmë vendet objekteve pikë dhe bllok do të fitojmë një pohimin dual të tij. Për shembull, në qoftë se A është pohimi: çdo bllok i $\mathcal{S}$ është incident të paktën me dy pika, atëherë pohimi dual i tij që e shënojmë me A^* do të jetë: çdo pikë është incidente të paktën me dy blloqe.

Ka vend kështu ky

POHIM 2.1.1. (Parimi i dualitetit) ***Për një klasë $\mathcal{K}$, të strukturave të incidencës shënojmë me $\mathcal{K}^* = \{\mathcal{S}' | \exists \mathcal{S} \in \mathcal{K}, \mathcal{S}^* = \mathcal{S}'\}$.***

(i) ***Në qoftë se A është një pohim që vlen për të gjitha strukturat $\mathcal{S}$ të $\mathcal{K}$, atëherë A* vlen për të gjitha strukturat e $\mathcal{K}^*$.***

(ii) ***Në qoftë se $\mathcal{K}$ =$\mathcal{K}$*, atëherë po të vlejë pohimi A për $\mathcal{K}$, edhe pohimi dual A* do të vlejë për $\mathcal{K}$.***

Përkufizimi 2.1.5. *Një element (pikë apo bllok) i strukturës $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ quhet element i izoluar, në qoftë se është incident vetëm me një apo me asnjë element tjetër të $\mathcal{S}$.*

Përkufizimi 2.1.6. *Një element i $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ quhet i plotë në qoftë se ai është incident me të gjitha elementet e tjera.*

Përkufizimi 2.1.7. *Struktura $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ quhet strukturë standarde, në qoftë se ajo nuk përmban elemente të izoluara dhe elemente të plota.*

Përkufizimi 2.1.8. [9] *$\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ quhet strukturë rregulare, në qoftë se të gjitha pikat e saj kanë fuqi të njejtë; ajo quhet uniforme, në qoftë se të gjitha blloqet e saj kanë fuqi të njejtë. Struktura regulare dhe uniforme quhet konfiguracion taktik.*

Nga figura 2 duket që çdo pikë dhe çdo drejtëz e konfiguracionit Fano kanë fuqinë 3, prandaj ai është një konfiguracion taktik.

LEMMË 2.1.1.[9] **Në një strukturë të fundme $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, shuma e fuqive të pikave është e barabartë me shumën e fuqive të blloqeve, d. m. th.**

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} card\,\mathcal{B}_P = \sum_{b\in\beta} card\,\mathcal{P}_b.$$

Le të jetë $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ një strukturë e fundme me ν pika dhe σ blloqe, ku $\mathcal{P}=\{P_1, P_2, \ldots, P_\nu\}$ dhe $\mathcal{B}=\{b_1, b_1, \ldots, b_\sigma\}$. Le të jenë $r_i = card\,\mathcal{B}_{P_i}$, $i=1, 2, \ldots, \nu$ dhe $k_j = card\,\mathcal{P}_{b_j}$, $j=1, 2, \ldots, \sigma$. Nga Lemma 2.1.2 kemi

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma . \tag{2}$$

Në qoftë se $\mathcal{S}$ është konfiguracion taktik me fuqi *r* të pikave dhe fuqi *k* të blloqeve, nga (2) marrim

$$\nu r = \sigma k. \tag{3}$$

Si çdo lidhje dyshe midis dy bashkësive të fundme edhe lidhja e incidencës $\mathcal{I}$ e një strukture të fundme $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ ka matricën e lidhjes, që në këtë rast e quajmë *matrica e* *incidencës*. Ajo përftohet si më poshtë [1]: në një tabelë drejtkëndëshe majtas vertikalisht vendoset bashkësia e nisjes $\mathcal{P}$ me v pikat e saj dhe sipër horizontalisht vendoset bashkësia e mbërritjes $\mathcal{B}$ me σ blloqet e saj. Rreshtat dhe shtyllat bosh të tabelës mbushen me 1 ose 0 përkatësisht kur $(P_i , b_j) \in \mathcal{I}$ ose $(P_i , b_j) \notin \mathcal{I}$. Matrica me $v\times\sigma$ përmasa që merret në këtë mënyrë është matrica e incidencës. Natyrën e një strukture të fundme mund ta studiojmë nëpërmjet matrices së incidences së saj. Është e qartë se shuma e 1-shave në rreshtin e *i*-të të saj është fuqia e pikës P_i kurse shuma e 1-shave në shtyllën e *j*-të të saj është fuqia e bllokut b_j.

Shembull 2.1.6. Le të jetë $\mathcal{S}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \in)$ një strukturë e fundme me $\mathcal{P}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dhe $\mathcal{B}=\{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$, ku $b_1=\{1, 2, 4\}$, $b_2=\{2, 3, 5\}$, $b_3=\{3, 4, 6\}$, $b_4=\{4, 5, 7\}$, $b_5=\{1, 5, 6\}$, $b_6=\{2, 6, 7\}$, $b_7=\{1, 3, 7\}$.

Matrica e incidencës për këtë strukturë do të jetë:

$$M_{\in} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Në të çdo rresht ka 3 njësha, prandaj të gjitha pikat kanë të njejtën fuqi $r=3$, që tregon se struktura është regulare. Por dhe çdo shtyllë ka 3 njësha, prandaj ajo është dhe uniforme. Për rrjedhojë ajo është konfiguracion taktik.

2.2. Plani afin

Le të jetë $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një strukturë incidence. Faktin $(P,\ell)\in\mathcal{I}$, të njëvlershëm me $P\,\mathcal{I}\,\ell$ do ta shënojmë $P\in\ell$ dhe do t'a lexojmë *pika P është incidente me drejtëzën ℓ apo drejtëza ℓ kalon nga pika P apo përmban pikën P*. Në këtë konteks një drejtëz të një plani afin do ta konsiderojmë si bashkësinë e pikave incidente me të.

Përkufizimi 2.2.1. [8] *Plan afin quhet struktura e incidencës $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, që kënaq aksiomat e mëposhtëme:*

A1. *Për çdo dy pika të ndryshme P, $Q\in\mathcal{P}$, ekziston një dhe vetëm një drejtëzë $\ell\in\mathcal{L}$, që kalon nga ato pika.*

Drejtëzën ℓ të përcaktuar nga pikat P dhe Q do t'a shënojmë PQ.

A2. *Për një pikë* $P\in\mathcal{P}$ *dhe një drejtëz* $p\in\mathcal{L}$ *të tilla që* $(P, p)\notin\mathcal{I}$, *ekziston vetëm një drejtëz* $q\in\mathcal{L}$, *që kalon nga pika P dhe e tillë që* $q\cap p=\varnothing$.

A3**.** *Në* $\mathcal{A}$ *ekzistojnë tri pika joincidente me një drejtëz.*

Nga $A1$ rrjedh se dy drejtëza të ndryshme të $\mathcal{L}$ kanë e shumta një pikë të përbashkët, me fjalë të tjera *dy drejtëza të ndryshme të* $\mathcal{L}$ *ose s'kanë pika të përbashkëta ose kanë vetëm një pikë të përbashkët*.

Dy drejtëza $p, q\in\mathcal{L}$, që përputhen ose nuk kanë pika të përbashkëta quhen *paralele* dhe në këtë rast shkruajmë $p||q$, kurse kur kanë vetëm një pikë të përbashkët themi se ato *priten*. Nga më sipër del që *dy drejtëza të* $\mathcal{L}$ *ose janë paralele ose priten*.

POHIM 2.2.1. ***Në një plan afin*** $\mathcal{A}$ ***ekzistojnë katër pika, çdo tri prej të cilave nuk janë incidente me një drejtëz (tri pika të tilla quhen jokolineare).***

Vërtetim. Nga $A3$, ekzistojnë tri pika $A, B, C\in\mathcal{P}$ joincidente me një drejtëz. Nga $A2$, ekziston vetëm një drejtëz $\ell\in\mathcal{L}$**,** incidente me pikën A dhe e tillë që $\ell\,||\,BC$. Nga $A2$, ekziston gjithashtu vetëm një drejtëz $m\in\mathcal{L}$, incidente me pikën C dhe e tillë që $m||AB$. Në planin afin dy drejtëza të ndryshme ose s'kanë pika të përbashkëta ose kanë një pikë të përbashkët. Del kështu se ekziston vetëm një pikë D e tillë që D=$m\cap\ell$. (Fig. 1)

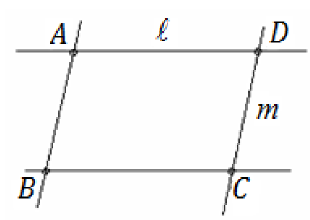

Fig.4

Pohimit 2.2.1 mund t`i japim edhe këtë formulim :

Në një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *për çdo tri pika A, B, C* $\in\mathcal{P}$ *joincidente me një drejtëz ekziston vetëm një pikë D*$\in\mathcal{P}$, *që katërbrinjëshi ABCD të jetë paralelogram* (Fig. 4).

Nga arsyetimi i mësipërm del që drejtëzat ℓ, AB, BC dhe m janë katër drejtëza të ndryshme të planit afin $\mathcal{A}$. Kjo tregon se është i vërtetë ky

RRJEDHIM. ***Në një plan afin $\mathcal{A}$ ekzistojnë katër drejtëza të ndryshme.***

Shembull 2.2.1. Në Fig. 5 janë dhënë katër pika dhe gjashtë drejtëza (gjashtë bashkësi nga ato pika dy nga dy). Le të jetë $\mathcal{P}$ bashkësia e atyre katër pikave, $\mathcal{L}$ bashkësia e atyre gjashtë drejtëzave dhe $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme $\in$ e një elementi në një bashkësi.

Është e qartë se $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence. Verifikohet lehtë se kjo gjeometri kënaq aksiomat A1, A2, A3, prandaj është një plan afin.

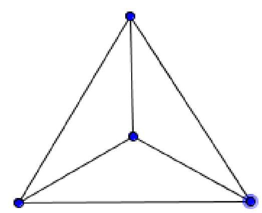

Fig.5

Le të jenë r, s dy drejtëza të çfarëdoshme nga bashkësia $\mathcal{L}$ e planit afin $\mathcal{A}$. Lidhja binare $\| = \{(r, s) \in \mathcal{L}^2 \mid r \| s \}$ quhet *lidhje e paralelizmit mbi* $\mathcal{L}$.

POHIM 2.2.2. ***Lidhja e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është një lidhje ekuivalence***.

Vërtetim. Eshtë e qartë se lidhja e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është lidhje refleksive dhe simetrike. Ajo është edhe kalimtare. Për këtë shqyrtojmë tri drejtëza të çfarëdoshme ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 të planit afin të tilla që $\ell_1 \| \ell_2$ dhe $\ell_2 \| \ell_3$. Kur të paktën dy prej tyre përputhen, rezulton menjëherë që $\ell_1 \| \ell_3$. Kur ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 janë të ndryshme, përsëri rezulton $\ell_1 \| \ell_3$, mbasi në të kundërt drejtëzat e ndryshme ℓ_1, ℓ_3 paralele me ℓ_2 priten në një pikë P, që nuk është incidente me ℓ_2, gjë që është në kundërshtim me aksiomën $A2$.

POHIM 2.2.3. ***Në një plan afin $\mathcal{A}$ çdo drejtëz është incidente së paku me dy pika të ndryshme.***

Vërtetim. Le të jenë A, B, C, D katër pika të ndryshme, çdo tri prej të cilave janë jokolineare. Sipas Pohimit 2.2.1 katër pika të tilla ekzistojnë në planin afin $\mathcal{A}$, madje të tilla që $AB \| CD$ dhe $AC \| BD$. Le të jetë d një drejtëz e çfarëdoshme e atij plani. Patjetër d

$\nparallel AB$ ose d $\nparallel AC$, mbasi në të kundërt, kur $d \parallel AB$ dhe $d \parallel AC$, nga vetia simetrike dhe vetia kalimtare e lidhjes së paralelizmit, rezulton $AB \parallel AC$, që bie në kundërshtim me faktin që pikat A, B, C janë jokolineare. Le të jetë d $\nparallel AB$. Sipas A1, kjo sjell që d pritet me AB në një pike. Pra ekziston $A' = d \cap AB$, që sjell $A' \mathcal{I} d$. Meqenëse $AB \parallel CD$, kemi gjithashtu $d \nparallel$ CD, që sjell ekzistencën e një pike $C' = d \cap CD$, për rrjedhojë kemi $C' \mathcal{I} d$, që sigurisht është e ndryshme nga A', sepse $AB \parallel CD$.(Fig.6)

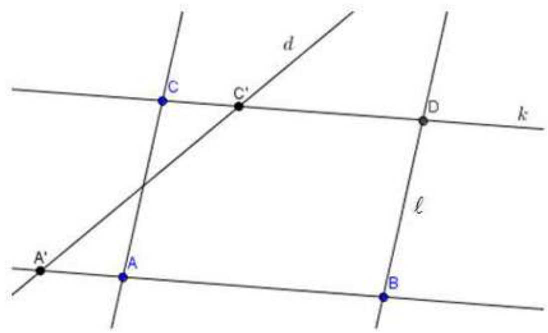

Fig.6

POHIM 2.2.4. ***Në një plan afin $\mathcal{A}$ çdo pikë është incidente të paktën me tri drejtëza.***

Vërtetim . Le të jetë pika $M \in \mathcal{P}$ dhe drejtëza $\ell \in \mathcal{L}$. Nga Pohimi 2.2.3, ekzistojnë pikat N, $P \in \ell$ të tilla që M, N, P janë jokolineare. Nga A2, ekziston vetëm një drejtëz $m \in \mathcal{L}$, incidente me pikën M e tillë që $m \| NP$. Por, nga A1, ekzistojnë drejtëzat e ndryshme $p=MN$ dhe $q=MP$, që meqenëse kanë e shumta një pikë të përbashkët, kanë vetëm pikën M të tillë. Përfundimisht, M është incidente me drejtëzat m, p, q.

Në planin afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$, siç thamë, konsiderohet si bashkësia e pikave $P \in \mathcal{P}$ incidente me të. Këtë fakt në paragrafin 2.1 e kemi shënuar $\mathcal{P}_\ell$ dhe e kemi quajtur përmbajtje e bllokut (drejtëzës) ℓ. Pra në një plan afin kemi $\ell = \mathcal{P}_\ell = \{ P \in \mathcal{P} \mid P \mathcal{I} \ell \}$. Ndërkaq $\mathcal{L}_P$ është përmbajtja e një pike $P \in \mathcal{P}$, d. m. th. bashkësia e drejtëzave nga $\mathcal{L}$ që kalojnë nga pika P: $\mathcal{L}_P = \{ \ell \in \mathcal{L} \mid P \mathcal{I} \ell \}$.

POHIMI 2.2.5. ***Në një plan afin të fundëm $\mathcal{A}$ çdo drejtëz përmban numër të njejtë pikash dhe nëpër çdo pikë kalon numër i njejtë drejtëzash. Për më tepër ekziston numri natyror n$\in \mathbb{N}$ i tillë që:***

(i) $\quad card\, \mathcal{P}_{\ell} = n\,, \ \forall\ \ell \in \mathcal{L},$

(ii) $\quad card\, \mathcal{L}_{P} = n + 1,\ \forall\ P \in \mathcal{P}\,,$

(iii) $\quad card\, \mathcal{P} = n^2\,,$

(iv) $\quad card\, \mathcal{L} = n^2 + n\,.$

Vërtetim. (i). Le të jetë ℓ një drejtëz e $\mathcal{L}$. Nga A3, ekziston pika $P \notin \ell$, kurse nga A2, ekziston vetëm një drejtëzë q , që kalon nëpër pikën P dhe $q \cap \ell = \varnothing$.

Nga A1 dhe nga A2, ndërmjet pikave të drejtëzës ℓ dhe drejtëzave të pikës P, që e presin drejtëzën ℓ ekziston një bijeksion (duke i shoqëruar pikën D çdo drejtëze d, që kalon nga pika P dhe që $d \cap \ell = D$), nga i cili rrjedh që

$$card\, \mathcal{L}_{P} = card\, \mathcal{P}_{\ell} + 1. \tag{2}$$

Nga Pohimi 2.2.1 ekzistojnë pikat $P, Q, R, S \in \mathcal{P}$, çdo tri prej të cilave janë jokolineare. Le të jetë

$$card\, \mathcal{P}_{QR} = n.$$

Meqenëse $P \notin QR$ dhe $P \notin RS$, secila nga drejtëzat QR, RS përmban $card\mathcal{L}_{P}$ - 1 pika, prandaj

$$card\, \mathcal{P}_{RS} = card\, \mathcal{P}_{QR} = n.$$

Po ashtu $Q \notin RS$ dhe $Q \notin PS$; rezulton që edhe

$$card\, \mathcal{P}_{PS} = card\, \mathcal{P}_{RS} = n.$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet se të gjashtë drejtëzat, që formohen nga 4 pikat $P, Q, R, S \in \mathcal{P}$ ($C_4^2 = 6$), kanë n-pika (numër të njëjtë pikash).

Le të jetë tani ℓ një drejtëz e çfarëdoshme nga $\mathcal{L}$ dhe P një pikë e çfarëdoshme e $\mathcal{P}$. Pika $P \in \ell$ ose pika $P \notin \ell$. Në qoftë se $P \in \ell$ dhe në qoftë se ℓ është një nga gjashtë drejtëzat e mësipërme kemi $card\ \mathcal{P}_{\ell} = n$. Në qoftë se $P \in \ell$ dhe në qoftë se ℓ është e ndryshme prej tyre, ajo nuk e përmban pikën Q, prandaj ℓ ka aq pika sa edhe drejtëza RS, pra n pika. Në qoftë se $P \notin \ell$, atëherë drejtëza ℓ ka aq pika sa edhe drejtëza QR. Si përfundim rezulton që për çdo $\ell \in \mathcal{L}$,

$$card\, \mathcal{P}_{\ell} = n. \tag{3}$$

(ii). Nga (2) dhe (3) del që për çdo $P \in \mathcal{P}$,

$$card\, \mathcal{L}_{P} = n+1. \tag{4}$$

(iii). Në çdo drejtëzë ℓ, e cila kalon nëpër një pikë P, ka $(n\text{-}1)$ pika të ndryshme nga pika P. Kështu gjithësejt në $\mathcal{P}$ kemi $(n\text{-}1)(n+1)$ pika të ndryshme nga pika P. Duke përfshirë dhe pikën P në $\mathcal{P}$ rezultojnë $(n\text{-}1)(n+1)+1=n^{2}-1+1=n^{2}$ pika, që tregon se

$$card\, \mathcal{P} = n^{2}. \tag{5}$$

(iv). Nga më sipër del që numri i drejtëzave të planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është $n(n+1) = n^{2} + n$. Ndryshe ka vend barazimi

$$card\, \mathcal{L} = n^{2} + n. \tag{6}$$

Numri n në Pohimin 2.2.5 quhet *rend* i planit afin të fundëm $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

Sipas Pohimit 2.2.2 lidhja $\|$ e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është një lidhje ekuivalence dhe klasa e ekujvalencës së saj, që përmban një drejtëz m , të cilën e shënojmë K_m, është bashkësia e të gjitha drejtëzave paralele me m. Drejtëzat e një bashkësie të tillë thuhet se kanë të njëjtin *drejtim*. Prandaj bashkësinë herës $\mathcal{L}/\| = \{K_m |\, m \in \mathcal{L}\}$ mund ta mendojmë si bashkësinë e të gjitha drejtimeve të drejtëzave të $\mathcal{L}$. Siç dihet një bashkësi herës është një copëtim [1], prandaj $K_m \cap K_r = \varnothing$ për $m \nparallel r$.

2.3. Plani projektiv

Përkufizim 2.3.1. [8] *Një strukturë incidence* $\Pi=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *quhet plan projektiv në qoftë se kënaq aksiomat:*

*P*1. *Çdo dy pika të ndryshme janë incidente me një drejtëz të vetme.*

*P*2. *Çdo dy drejtëza të ndryshme janë incidente me një pikë të vetme.*

*P*3. *Ekzistojnë katër pika, çdo tri prej të cilave janë joincidente me një drejtëz.*

Edhe këtu faktin $(P,\ell)\in\mathcal{I}$, të njëvlershëm me $P\,\mathcal{I}\,\ell$ do ta shënojmë $P\in\ell$ dhe do t'a lexojmë *pika P është incidente me drejtëzën* ℓ *apo drejtëza* ℓ *kalon nga pika P apo përmban pikën P*. Në këtë konteks, ashtu si në një plan afin edhe në një plan projektiv një drejtëz do ta konsiderojmë si bashkësinë e pikave incidente me të. Prandaj edhe këtu do të kemi $\ell=\mathcal{P}_\ell=\{P\in\mathcal{P}\mid P\mathcal{I}\ell\}$ dhe $\mathcal{L}_P=\{\ell\in\mathcal{L}\mid P\mathcal{I}\ell\}$.

Veç kësaj, drejtëzën që përcaktohet sipas *P*1 nga dy pika të ndryshme *A* dhe *B*, do t'a shënojmë *AB*. Për pikën *P* që përcaktohet sipas *P*2 nga drejtëzat e ndryshme ℓ, *m* do të shkruajmë $P=l\cap m$ dhe do t'a quajmë *pikëprerje* të drejtëzave ℓ dhe *m*. Pikat incidente me një drejtëz i quajmë *kolineare* dhe drejtëzat që kalojnë nga e njejta pikë i quajmë *konkurente*.

Përkufizim 2.3.2. *Një strukturë incidence, që plotëson aksiomat P*1 *dhe P*2 *quhet konfiguracion i mbyllur, kurse një konfiguracion i mbyllur, që nuk e plotëson aksiomën P*3 *quhet plan i degjeneruar*.

Përkufizim 2.3.3. *Bashkësia e tri pikave të ndryshme jokolineare A, B, C së bashku me drejtëzat AB, BC, CA quhet trekulmësh* dhe *shënohet ABC*. *Pikat A, B, C quhen kulme, ndërsa drejtëzat AB, BC, CA quhen brinjë të trekulmëshit ABC.*

Le të jenë *ABC* dhe *A' B' C'* dy trekulmësha të ndërtuar si në figurën e mëposhtme që njihet me emrin **konfiguracioni i Desargut.** (Fig.7)

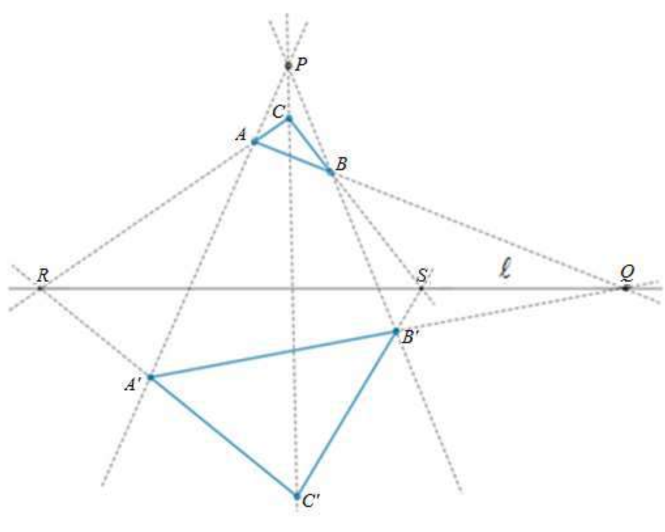

Fig.7

Për trekulmëshat *ABC* dhe *A′ B′ C′* në konfiguracionin e Desargut thuhet se janë *perspektiv nga pika P* dhe nga drejtëza ℓ. Në këtë rast pika *P* quhet *kulmi* i perspektivitetit, ndërsa drejtëza ℓ quhet *boshti i perspektivitetit*.

TEOREMË 2.3.1 (Teorema e Desargut) [40]. Le të jenë *ABC* dhe *A'B'C'* dy trekulmësha me kulme jo të njejta në një plan projektiv $\Pi=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Ata janë perspektivë nga një pikë, vetëm atëherë kur ata janë perspektivë nga një drejtëz; ndryshe, ka vend njëvlerësia

$$(\exists P\in \mathcal{P}, AA' \cap BB' \cap CC' = P) \Leftrightarrow (\exists \ell\in \mathcal{L}, \text{ që } AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C' \in \ell).$$

Përkufizim 2.3.4. *Bashkësia e katër pikave A, B, C, D, çdo tri prej të cilave janë jokolineare quhet katërkulmësh dhe shënohet ABCD. Bashkësia e katër drejtëzave a, b, c, d, çdo tri prej të cilave janë jokonkurente quhet katërbrinjësh.* (Fig. 8).

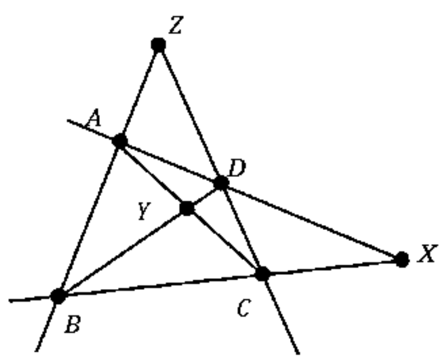

Fig.8

LEMMË 2.3.1. [8] ***Çdo plan projektiv përmban një katërbrinjësh***.

Vërtetim. Nga aksioma *P*3, ekziston një katërkulmësh i përcaktuar nga pika, që po i shënojmë *A, B, C, D*. Shqyrtojmë drejtëzat *AB, BC, CD, DA*. Çdo tri prej tyre janë jokonkurente. Supozojmë të kundërtën, se tri prej tyre dhe pikërisht drejtëzat *AB*, *AD*, *CD* janë konkurente. Le të jetë *T* pika e përbashkët e tyre. Nga *P*2 dhe nga fakti që $A=AB\cap AD$, marrim $A=T$. Po ashtu, nga *P*2 dhe nga fakti që $D=AD\cap CD$, marrim $D=T$. Kemi kështu një kundërthënie me faktin, që pikat *A, B, C, D* janë të ndryshme. Për rrjedhojë drejtëzat *AB, BC, CD, DA* formojnë një katërbrinjësh.

Vihet re se në qoftë se *ABCD* është një katërkulmësh i një plani projektiv, atëherë pika $AB\cap CD$ i takon *AB* dhe është e ndryshme nga pikat *A*, *B*. Prej këndej del i vërtetë ky

RRJEDHIM. ***Çdo drejtëz e një plani projektiv përmban të paktën tri pika të ndryshme.***

Struktura duale $\Pi^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ e një plani projektiv $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, sipas Përkufizimit 2.1.4, përftohet duke ndërruar rolet e pikave dhe drejtëzave të atij plani projektiv. Në këtë rast, pohimi dual i aksiomës *P*2 tek Π ka formulimin e aksiomës *P*1 tek Π^*; pohimi dual i aksiomës *P*1 tek Π ka formulimin e aksiomës *P*2 tek Π^*. Meqenëse Π është plan projektiv, Π^* kënaq aksiomat *P*1 dhe *P*2. Veç kësaj, Lemma 2.3.1, duke patur parasysh Përkufizimin 2.3.4, ndryshe formulohet " në Π ekzistojnë katër drejtëza, çdo tri prej të cilave janë jokonkurente". Pohimi dual përkatës do të jetë " në Π^* ekzistojnë katër pika, çdo tri prej të cilave janë jokolineare", që tregon se Π^* kënaq edhe aksiomën *P*3. Del kështu e vërtetë kjo

TEOREMË 2.3.2. ***Struktura duale*** $\Pi^*=(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ ***e një plani projektiv*** $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***është gjithashtu plan projektiv***.

RRJEDHIM 1. ***Në çdo pikë të një plani projektiv kalojnë të paktën tri drejtëza të ndryshme.***

RRJEDHIM 2. ***Në një plan projektiv ekzistojnë katër pika të ndryshme dhe katër drejtëza të ndryshme.***

Shembull 2.3.1. Vihet re lehtë që gjeometritë Fano të paraqitura në figurat 2 dhe 3 i plotësojnë tri aksiomat e Përkufizimit 2.3.1 të planit projektiv. Nga figurat duket se një plan projektiv Fano ka shtatë pika dhe shtatë drejtëza. Është ky numri më i vogël i drejtëzave apo pikave në një plan projektiv të fundëm?

Është me interes të gjendet numri më i vogël i pikave dhe drejtëzave të një plani projektiv të fundëm. Më poshtë do të marë përgjigje dhe kjo çështje.

LEMMË 2.3.2. [8] ***Në qoftë se*** ℓ ***dhe m janë dy drejtëza të ndryshme të një plani projektiv*** Π***, atëherë ekziston një pikë*** $P \in \Pi$ ***e tillë që*** $P \notin \ell$ ***dhe*** $P \notin m$.

Vërtetim. Supozojmë që lemma nuk vlen, d. m. th $\forall X \in \Pi$ kemi $X \in \ell$ ose $X \in m$. Le të jetë *ABCD* një katërkulmësh i planit Π. Atëherë secili nga kulmet e tij është incident me ℓ ose me *m*. Nga që çdo tri prej këtyre pikave janë jokolineare, dy prej tyre p.sh. *A*, *B* janë incidente me ℓ, për rrjedhojë *C, D* janë incidente me *m*. Le të jetë $P = AC \cap BD$. Pika *P* nuk është incidente me ℓ, se në të kundërt kemi $P \in AB \neq AC$, që sjell *P=A*. Por *P* është incidente dhe me drejtëzën *BD* , pra *P*, *B, D* rezultojnë kolineare. Kjo bie në kundërshtim me faktin që pikat *A*, *B, D* janë jokolineare. Në mënyrë të ngjashme vërtetohet se $P \notin m$.

TEOREMË 2.3.3.[8] ***Në një plan projektiv ekziston një bijeksion:***

1. ***ndërmjet pikave incidente me një drejtëz të çfarëdoshme dhe pikave incidente me një drejtëz tjetër të çfarëdoshme të tij;***
2. ***ndërmjet pikave incidente me një drejtëz të çfarëdoshme dhe drejt[zave që kalojnë nga një pikë e çfarëdoshme e tij.***

Vërtetim. 1. Le të jenë ℓ dhe m dy drejtëza të çfarëdoshme të ndryshme të një plani projektiv $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Nga Lema 2.3.2, ekziston një pikë $P \in \Pi$ e tillë që $P \notin \ell$ dhe $P \notin m$. Le të jetë X një pikë incidence e drejtëzës ℓ, e cila së bashku me pikën P përcakton drejtëzën XP. Shënojmë $Y=XP \cap m$, e cila së bashku me pikën P përcakton drejtëzën YP. Është e qartë se $Y=XP \cap m \Leftrightarrow X=YP \cap \ell$. Sipas aksiomës $P2$, për çdo $X \in \ell$, pika Y është e vetme në drejtëzën m dhe për çdo $Y \in m$, pika X është e vetme në drejtëzën ℓ. I shoqërojmë pikës së çfarëdoshme $X \in \ell$ pikën e vetme $Y \in m$. Përftojmë kështu një pasqyrim $\alpha : \ell \to m$, përcaktuar nga $\alpha(X)=Y$, $\forall X \in \ell$. Meqenëse $X_1 \neq X_2 \Rightarrow \alpha(X_1) \neq \alpha(X_2)$, mbasi supozimi i të kundërtës përjashtohet nga aksioma $P2$, ai është injeksion. Ai është dhe syrjeksion, nga njëvlerësia e mësipërme, pra pasqyrimi α është një bijeksion.

2. Le të jetë tani P pikë e çfarëdoshme dhe ℓ drejtëz e çfarëdoshme e planit projektiv Π. Dallojmë dy raste: $P \notin \ell$, $P \in \ell$. Në rastin e parë, i shoqërojmë pikës së çfarëdoshme $X \in \ell$ drejtëzën $XP \in \mathcal{L}_P$, që sipas aksiomës $P1$, është e vetme. Përftojmë kështu pasqyrimin $\beta : \ell \to \mathcal{L}_P$, përcaktuar nga $\beta(X)=XP$, $\forall X \in \ell$, i cili duket lehtë që është një bijeksion. Në rastin e dytë kur $P \in \ell$, meqenëse Π ka një katërbrinjësh, rezulton që ekziston një drejtëz $m \neq \ell$ e tillë që $P \notin m$. Prej faktit që $m \neq \ell$, nga pjesa e parë, ekziston një bijeksion $\alpha : \ell \to m$, kurse prej faktit që $P \notin m$, ekziston një bijeksion $\beta :\, m \to \mathcal{L}_P$. Kompozimi i dy bijeksioneve është një bijeksion [1], prandaj bijeksioni $\beta \circ \alpha :\, \ell \to \mathcal{L}_P$, është bijeksioni i kërkuar. Në qoftë se ekziston një bijeksion ndërmjet dy bashkësive, atëherë ato kanë të njejtin numër kardinal [1]. Prandaj ka vend ky

RRJEDHIM. ***Në një plan projektiv*** $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***për çdo drejtëz*** ℓ ***dhe për çdo pikë P ka vend barazimi***

$$\textbf{\textit{card}}\, \mathcal{P}_\ell = \textbf{\textit{card}}\, \mathcal{L}_P \,, \tag{7}$$

ndryshe, numri kardinal i pikave incidente me një drejtëz është i njejtë me numrin kardinal të drejtëzave incidente me një pikë.

TEOREMË 2.3.4. [15] ***Në një plan projektiv*** Π ***të fundëm ekziston një numër natyror*** $n \geq 2$ ***i tillë që:***

(i) ***Çdo drejtëz në*** Π ***përmban saktësisht*** $n+1$ ***pika dhe çdo pikë në të është incidente me n+1 drejtëza;***

(ii) ***Plani*** Π ***përmban*** $n^2+n+1=\dfrac{n^3-1}{n-1}$ ***pika dhe po kaq drejtëza***.

Vërtetim. (i) Le të jetë a një drejtëz e planit projektiv Π. Sipas Rrjedhimit të Lemmës 2.3.1, ajo përmban të paktën tri pika të ndryshme. Prandaj numri i pikave incidente me drejtëzën a do të jetë n+1, ku $n \geq 2$. Sipas (7), në një plan projektiv të fundëm, ku bashkësitë e pikave dhe ato të drejtëzave janë të fundme, rezulton që të gjitha drejtëzat përmbajnë të njejtin numër pikash dhe të gjitha pikat janë incidente me të njejtin numër drejtëzash. Për rrjedhojë çdo drejtëz në planin projektiv Π është incidente me n+1 pika. Gjithashtu vlen dhe pohimi që çdo pikë në planin projektiv Π është incidente me n+1 drejtëza.

(ii) Në planin projektiv Π ka një drejtëz dhe një pikë joincidente me të. Le të jenë ℓ një drejtëz dhe *P* një pikë të planit Π të tilla që $P \notin \ell$. Atëherë, nga bijeksioni $\beta : \ell \to \mathcal{L}_P$, përcaktuar nga $\beta(X)=XP$, $\forall X \in \ell$, pikat e Π janë incidente me drejtëzat *XP* , ku *X* është njera nga *n*+1 pikat e drejtëzëz ℓ, prandaj të tilla janë *n*+1 drejtëza. Është e qartë se secila prej tyre përmban *n* pika të ndryshme nga pika *P*. Prandaj në planin Π ka $n(n+1)+1=n^2+n+1=\dfrac{n^3-1}{n-1}$ pika të ndryshme. Në mënyrë duale do të tregonim se aty ka dhe po kaq drejtëza të ndryshme.

Përkufizimi 2.3.5. Për planin projektiv të fundëm Π me *n*+1 pika dhe *n*+1 drejtëza numrin natyral $n \geq 2$ e quajmë rend të planit Π.

Meqenëse $n \geq 2$, numri më i vogël i pikëve në një plan projektiv është i atij plani, që e ka fuqinë 2. Ky numër është $2^2+2+1=7$, sa ai i pikave apo drejtëzave në një plan projektiv Fano.

2.4. Kalimi i një plani projektiv në një plan afin dhe anasjellas

Në këtë paragraf do të tregojmë se si mund të shndërrojmë një plan projektiv në një plan afin dhe anasjellas.

Le të jetë ($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) një strukture incidence dhe ℓ një drejtëz e caktuar në të. Shënojmë $\mathcal{P}^{\ell}$ nënbashkësinë e bashkësisë $\mathcal{P}$ të pikave të strukturës, që përftohet mbasi largohen prej saj pikat e drejtëzës ℓ, d. m. th. $\mathcal{P}^{\ell} = \{P \in \mathcal{P} \mid P \notin \ell\}$; shënojmë gjithashtu $\mathcal{L}^{\ell}$ nënbashkësinë e bashkësisë $\mathcal{L}$ të drejtëzave të strukturës, që përftohet mbasi largohet prej saj drejtëza ℓ, d.m.th. $\mathcal{L}^{\ell} = \{d \in \mathcal{L} \mid d \neq \ell\}$ dhe $\mathcal{I}^{\ell} = \mathcal{I} \cap (\mathcal{P}^{\ell} \times \mathcal{L}^{\ell})$. Sipas Përkufizimit 2.1.2, treshja $(\mathcal{P}^{\ell}, \mathcal{L}^{\ell}, \mathcal{I}^{\ell})$ është nënstrukturë e strukturës së incidencës $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

TEOREMË 2.4.1. ***Në qoftë se struktura*** $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***është një plan projektiv dhe*** ℓ ***është një drejtëz e caktuar në të, atëherë nënstruktura*** $\Pi^{\ell} = (\mathcal{P}^{\ell}, \mathcal{L}^{\ell}, \mathcal{I}^{\ell})$ ***e tij është një plan afin.***

Vërtetim. 1. Çdo dy pika nga Π^{ℓ} janë incidente me një drejtëz të vetme të Π^{ℓ}.

2. Shënojmë me P një pikë në drejtëzën ℓ. Le të jenë a, b dy drejtëza të ndryshme incidente me pikën P të tilla që asnjëra të mos jetë drejtëza ℓ. Atëherë a, b janë drejtëza të Π^{ℓ}, që nuk kanë pikëprerje në të. Le të jetë tani A një pikë e çfarëdoshme e Π^{ℓ}, që nuk i takon drejtëzës p dhe m drejtëza e përcaktuar nga A dhe P në planin Π. Atëherë m është drejtëza e vetme e Π^{ℓ} incidente me pikën A, e cila nuk e pret drejtëzën p.

3. Në planin projektiv Π ka një katërkulmësh *ABCD*. Në qoftë se drejtëza ℓ nuk është njera nga brinjët e tij, atëherë tre nga kulmet e tij janë jokolinearë në Π^{ℓ}. Në qoftë se ajo është një nga brinjët e tij, atëherë, nga Lemma 2.3.2, ka një pike që nuk ndodhet në të, e cila së bashku me dy kulmet që nuk ndodhen në të, janë tre pika jokolineare në Π^{ℓ}.

Tre pikat e mësipërme tregojnë se struktura Π^{ℓ} kënaq tre aksiomat e përkufizimit të një plani afin, prandaj ajo është një plan afin.

Shembull 2.4.1. Vihet re lehtësisht se plani afin i Shembullit 2.2.1 i ilustruar në Fig. 5 përftohet nga plani projektiv Fano i ilustruar në Fig. 2, mbasi largohen prej tij një drejtëz dhe pikat e saj.

TEOREMË 2.4.1 tregon se se me largimin e një drejtëze dhe pikave të saj nga një plan projektiv ai shndërrohet në një plan afin. Do të tregojmë tani mënyrën e shndërrimit të një plani afin në një plan projektiv.

Le të jetë $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një plan afin. Sipas Pohimit 2.2.2, lidhja $\parallel$ e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është një lidhje ekuivalence. Klasat K të ekuivalencës së saj i quajmë *klasa paralelizmi*. Çdo njëra prej tyre është bashkësia e drejtëzave paralele me një drejtëz të dhënë dhe dy drejtëza që i takojnë klasave të ndryshme janë joparalele. Krahas tij ndërtojmë në mënyrën e mëposhtëme strukturën e incidences $(\mathcal{P}^{*}, \mathcal{L}^{*}, \mathcal{I}^{*})$:

1.Çdo klasë paralelizmi K të planit afin $\mathcal{A}$ e quajmë *pikë ideale*, e shënojmë P_K dhe pranojmë që $P_K \in \ell$, $\forall \ell \in K$. E zgjerojmë bashkësinë $\mathcal{P}$ të pikave të planit $\mathcal{A}$ me pikat ideale P_K; bashkësinë e zgjeruar në këtë mënyrë e shënojmë $\mathcal{P}^*$.

2. Bashkësinë $\mathcal{L}$ të drejtëzave të planit $\mathcal{A}$ e zgjerojmë me një të ashtuquajtur *drejtëz Ideale* (ose *drejtëz infinite*), që e shënojmë ℓ_∞, për të cilën pranojmë që $P_K \in \ell_\infty$, $\forall P_K \in \ell_\infty$. Bashkësinë e zgjeruar në këtë mënyrë e shënojmë $\mathcal{L}^*$.

3. Përcaktojmë një relacion incidence $\mathcal{I}^*$ ndërmjet pikave të $\mathcal{P}^*$ dhe drejtëzave të $\mathcal{L}^*$ si më poshtë:

$P\mathcal{I}^* \ell$ është $P\mathcal{I}\ell$, për $P \in \mathcal{P}$ dhe $\ell \in \mathcal{L}$;

$P\mathcal{I}^* \ell$ është $P_K \in \ell$, për $P=P_K$ dhe $\ell \in K$, $\forall$ K;

$P\mathcal{I}^* \ell$ është $P_K \in \ell_\infty$, për $P=P_K$ dhe $\ell = \ell_\infty$.

TEOREME 2.4.2. ***Në qoftë se struktura*** $\mathcal{A}= (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***është një plan afin, atëherë struktura*** $\Pi = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ ***ndërtuar më sipër është një plan projektiv.***

Vërtetim. 1. Çdo dy pika $A,B \in \mathcal{P}^*$, në qoftë se janë në $\mathcal{P}$, ato përcaktojnë drejtëzën $AB \in \mathcal{A}$, e cila është gjithashtu drejtëz e Π; në qoftë se $A \in \mathcal{P}$ dhe $B = P_K$, atëherë ekziston vetëm një drejtëz $b \in K$, që $A \in b$ dhe $P_K \in b$. Përsëri ato përcaktojnë një drejtëz të vetme në planin afin $\mathcal{A}$, e cila është gjithashtu drejtëz e Π; në qoftë se $A = P_{K_1}$ dhe $B = P_{K_2}$, atëherë ato dy pika përcaktojnë drejtëzën e vetme ℓ_∞. *Kështu çdo dy pika nga* Π *përcaktojnë një dhe vetëm një drejtëz nga* Π.

2. Le të jenë ℓ dhe m dy drejtëza të çfarëdoshme të Π. Drejtëza $\ell_\infty \in \Pi$ pret çdo drejtëz tjetër të Π në një dhe vetëm një pikë, prandaj kur kjo është njera prej tyre, rezulton se ato priten në një pikë. Në qoftë se ℓ dhe m priten në planin $\mathcal{A}$, atëherë ato priten në Π. Në qoftë se ℓ dhe m nuk priten në $\mathcal{A}$, atëherë $\ell \parallel m$ në planin $\mathcal{A}$, rrjedhimisht ℓ dhe m i takojnë të njëjtës klasë paralelizmi K në $\mathcal{A}$. Kështu ℓ dhe m priten në pikën P_K të Π. Pra, *çdo dy drejtëza nga* Π *priten në një pikë të të vetme të* Π.

3. Ngase $\mathcal{A}$ është plan afin, $\mathcal{A}$ përmban tri pika jokolineare X, Y, Z. Le të jetë $XY \cap \ell_\infty = P_{K_1}$ dhe $YZ \cap \ell_\infty = P_{K_2}$ në Π. Nga se XY nuk është paralele me YZ në planin afin $\mathcal{A}$, $P_{K_1} \neq P_{K_2}$ dhe pikat X, Z, P_{K_1}, P_{K_2} formojnë një katërkulmësh në Π. Tre pikat e mësipërme tregojnë se struktura Π kënaq tre aksiomat e përkufizimit të një plani projektiv, prandaj ajo është një plan projektiv. Duke patur parasysh Teoremën 2.4.1 vemë re se në këtë rast $\mathcal{A}=\Pi^{\ell_\infty}$. Ka plane projektive të tjera që shndërrohen në planin afin $\mathcal{A}$? Tek [40] jepet:

Përkufizimi 2.4.1. *Le të jenë* $S_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{I}_1)$ *dhe* $S_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{I}_2)$ *dy struktura incidence. Pasqyrimi* $\varphi : S_1 \to S_2$ *i tillë që*

- $\forall P \in \mathcal{P}_1,\ \varphi(P) \in \mathcal{P}_2;$
- $\forall \ell \in \mathcal{L}_1,\ \varphi(\ell) \in \mathcal{L}_2;$
- $\forall P \in \mathcal{P}_1$ dhe $\forall \ell \in \mathcal{L}_1,\ P\mathcal{I}_1\ell \Rightarrow \varphi(P)\mathcal{I}_2\varphi(\ell)$

quhet homomorfizëm i strukturës S_1 *në strukturën* S_2*. Në qoftë se* φ *është bijeksion ai quhet izomorfizëm i strukturës* S_1 *në strukturën* S_2*.*

Përgjigjen e pyetjes që u shtrua më sipër e jep kjo

TEOREME 2.4.3. [8] ***Për çdo plan afin $\mathcal{A}$ me afërsi deri në izomorfizëm ekziston vetëm një plan projektiv Π i tillë që $\Pi^{\ell} = \mathcal{A}$, ku ℓ është një drejtëz e Π.***

KREU 3

MODELI I NJË UNAZE TERNARE PLANARE NË NJË PLAN TË DESARGUT

Në kreun e tretë tregojmë se në planin afin të Desargut, në kushte të caktuara, një unazë ternare planare shndërrohet në një unazë të zakonshme associative, gjë që na çon në ndërtimin e një modeli të një unaze ternare planare që sillet si një unazë e zakonshme. Pra, kur në një plan afin të koordinatizuar, veç aksiomës së parë të Desargut vlen edhe aksioma e dytë e tij, atëherë unaza ternare planare e tij është modeli i një unaze të zakonshme associative.

3.1. Koordinatizimi i një plani afin

Le të jetë $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një plan afin. Në të, një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$ konsiderohet si bashkësia e pikave $P \in \mathcal{P}$, që janë incidente me atë drejtëz dhe ky fakt është shënuar $\mathcal{P}_{\ell}$. Kurse bashkësia e drejtëzave nga $\mathcal{L}$ që kalojnë nga pika P është shënuar $\mathcal{L}_{P}$. Po ashtu, bashkësia e drejtëzave nga $\mathcal{L}$ paralele me një drejtëz të dhënë m (klasa e paralelizmit) është shënuar K_m. Ndërkaq, nga aksioma $A2$ e planit afin, për çdo pikë $A \in \mathcal{P}$, ekziston një dhe vetëm një drejtëz d, që kalon nëpër pikën A dhe $d \parallel m$. Në këtë rast do të shënojmë $d = \ell_m^A$.

Në planin afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ fiksojmë një pikë të çfarëdoshme $O \in \mathcal{P}$ dhe çfarëdo tri drejtëza të ndryshme d_1, d_2, $d_3 \in \mathcal{L}$, që kalojnë nëpër pikën O. Marrim një pikë $X \in d_1$, që $X \neq O$,një pikë $I \in d_2$, që $I \neq O$ dhe një pikë $Y \in d_3$, që $Y \neq O$. Drejtëzën OX e quajmë drejtëza e abshisave, drejtëzën OY e quajmë drejtëza e ordinatave, kurse drejtëzën OI, që e shënojmë edhe u, e quajmë *drejtëz njësi*, ndërsa pikën I e quajmë *pikë njësi* (Fig.1).

Le të jetë S një bashkësi simbolesh e tillë që

$$\text{card } S = \text{card } \mathcal{P}_u \tag{1}$$

dhe $\sigma : \mathcal{P}_u \to S$ një pasqyrim bijektiv i bashkësisë $\mathcal{P}_u$ të pikave të drejtëzës njësi *u* me bashkësinë *S*. Shënojmë me $0 = \sigma(O)$, $1 = \sigma(I)$, të cilët rezultojnë dy simbole të ndryshme të *S*.

Shqyrtojmë tani bashkësinë $\mathcal{P}$ të pikave të planit afin $\mathcal{A}$. Për çdo pikë $P \in \mathcal{P}_u$ ekziston simboli $p = \sigma(P) \in S$. I shoqërojmë pikës *P* çiftin $(p, p) \in S \times S$.

Përkufizim 3.1.1. *Në kushtet e mësipërme, koordinatat e çiftit* $(p, p) \in S \times S$ *i quajmë koordinata të pikës P dhe këtë fakt e shënojmë* $P(p, p)$.

Pra, $\forall\, P \in \mathcal{P}_u$, $P(p,p) \Leftrightarrow p = \sigma(P)$. (2)

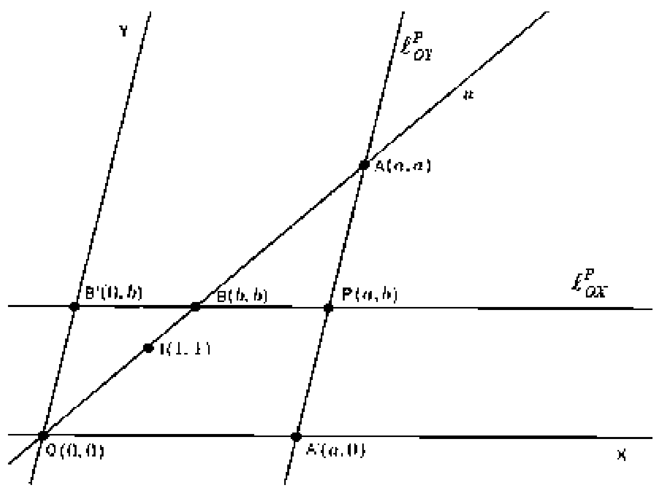

Fig.1

Në veçanti kemi *O*(0, 0) dhe *I*(1, 1).

Vihet re lehtë që për çdo pikë $P \notin \mathcal{P}_u$ ekzistojnë drejtëzat $\ell^P_{OX} \in K_{OX}$ dhe $\ell^P_{OY} \in K_{OY}$, të cilat presin drejtëzën njësi *u* (Fig. 1). Le të jetë $\ell^P_{OY} \cap OI = A$ dhe $\ell^P_{OX} \cap OI = B$.

Përkufizim 3.1.2. *Në kushtet e mësipërme, në qoftë se* $A(a, a)$ dhe $B(b, b)$, *atëherë koordinatat e çiftit* $(a, b) \in S \times S$ *i quajmë koordinata të pikës P dhe këtë fakt e shënojmë* $P(a, b)$.

Pra,

$$\forall\, P\in \mathcal{P} \wedge P\notin \mathcal{P}_u\,,\, P(a, b) \Leftrightarrow \ell^{P}_{OY} \cap u = A(a, a) \wedge \ell^{P}_{OX} \cap u = B(b, b) \tag{3}$$

Përftojmë në këtë mënyrë një pasqyrim $\mathcal{P} \rightarrow S\times S$, i cili, duket lehtë, që është një bijeksion.

Përkufizim 3.1.3. *Pesëshja e radhitur* (O, I, OX, OY, OI) *quhet sistem koordinativ në planin afin* $\mathcal{A}$, *pika* O *quhet origjina e koordinatave*, *bashkësia e simboleve* S *quhet bashkësia e koordinatave të planit afin* $\mathcal{A}$, *kurse vet plani afin* $\mathcal{A}$ *në këtë rast quhet i koordinatizuar*.

Nga sa më sipër mënyrën e përcaktimit të koordinatave $P(a, b)$ të një pike të çfarëdoshme $P\in \mathcal{P}$ mund ta paraqesim në trajtën

$$\forall\, P\in \mathcal{P}\ \text{(Fig.1)},\ \ 1)\ \left.\begin{array}{l} P\in OI \\ p=\sigma(P) \end{array}\right] \Leftrightarrow P(p,p)\ ;$$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} P\notin OI \\ \ell^{P}_{OY}\cap OI = A(a,a) \\ \ell^{P}_{OX}\cap OI = B(b,b) \end{array}\right] \Leftrightarrow P(a,b) \tag{4}$$

Prej këndej, për një pikë $A'\in OX$ dhe $A'\neq O$ kemi

$$\left.\begin{array}{l} A'\notin OI \\ \ell^{A'}_{OY}\cap OI = A(a,a) \\ \ell^{A'}_{OX}\cap OI = O(0,0) \end{array}\right] \Leftrightarrow A'(a,0)\ ,$$

kurse për një pikë $B'\in OY$ dhe $B'\neq O$ kemi

$$\left.\begin{array}{l} B'\notin OI \\ \ell^{B'}_{OY}\cap OI = O(0,0) \\ \ell^{B'}_{OX}\cap OI = B(b,b) \end{array}\right] \Leftrightarrow B'(0,b)\,.$$

Duke patur parasysh se për origjinën O kemi $O(0, 0)$, rezulton se *pikat e drejtëzës së abshisave OX e kanë koordinatën e dytë* 0, *kurse pikat e drejtëzës së ordinatave OY e kanë koordinatën e parë* 0. Ndërkaq, duke qenë se çdo pikë P e planit $\mathcal{A}$ është pikëprerja e drejtëzave ℓ^{P}_{OX} dhe ℓ^{P}_{OY} (Fig.1), kemi

$$P(a,b) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \ell_{OY}^{P} \cap OX = A'(a,0) \\ \ell_{OX}^{P} \cap OY = B'(0,b) \end{bmatrix} \tag{5}$$

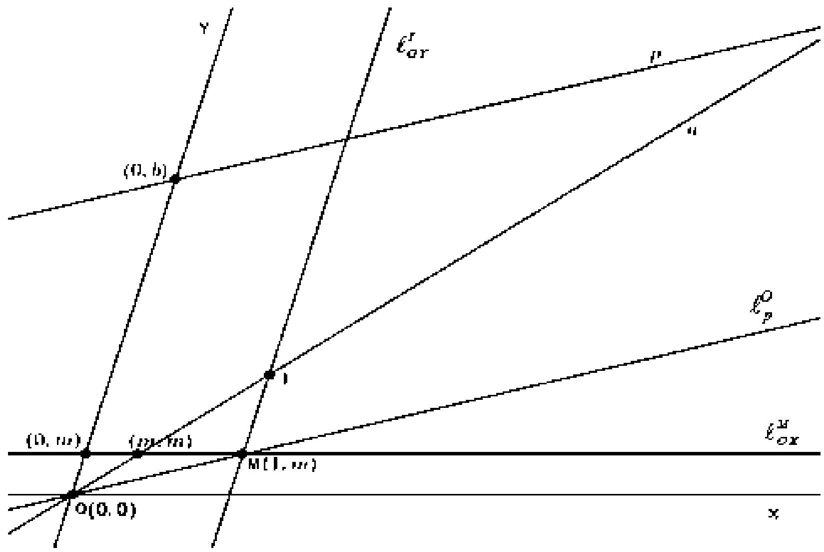

Fig.2

Drejtëzën $\ell_{OY}^{I} \in K_{OY}$, që kalon nga pika njësi *I* dhe është paralele me drejtëzën e ordinatave *OY*, e quajmë *drejtëza e pjerrësive* (Fig.2). Për çdo drejtëz $p \notin K_{OY}$, shënojmë *M* pikëprerjen $\ell_{p}^{O} \cap \ell_{OY}^{I}$. Le të jenë (*m*, *m*) koordinatat e pikëprerjes $\ell_{OX}^{M} \cap OI$. Atëherë, është e qartë se, koordinatat e pikës *M* do të jenë *M*(1, *m*) dhe ato të pikëprerjes $\ell_{OX}^{M} \cap OY$ do të jenë (0, *m*). Le të jenë (0, *b*) koordinatat e pikëprerjes $p \cap OY$.

Përkufizim 3.1.4. *Në kushtet e mësipërme,* simboli $m \in S$ quhet *pjerrësia* e drejtëzës *p*, ndërsa simboli $b \in S$ quhet *prerjeordinata* e drejtëzës *p*.

Edhe mënyrat e përcaktimit të pjerrësisë *m* dhe të prerjeordinatës së një drejtëze $p \notin K_{OY}$ mund t`i përmbledhim në trajtat si më poshtë:

$$\left.\begin{array}{l} p \notin K_{OY} \\ M = \ell_{p}^{O} \cap \ell_{OY}^{I} \\ \ell_{OX}^{M} \cap OI = (m,m) \end{array}\right] \Rightarrow m \text{ është pjerrësia e drejtëzës } p; \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} p \notin K_{OY} \\ p \cap OY = (0,b) \end{array}\right] \Rightarrow b \text{ është prerjeordinata e drejtëzës } p. \tag{7}$$

Është e qartë se drejtëzat paralele kanë pjerrësi të njejtë dhe anasjellas, drejtëzat me pjerrësi të njejtë janë paralele (sepse janë paralele me të njejtën drejtëz, që kalon nëpër pikën O). Nga (6) duket që drejtëzat e klasës K_{OX} kanë pjerrësi 0, kurse ato të klasës K_{OI} kanë pjerrësi 1. Për drejtëzat e klasës K_{OY} pjerrësia është e papërcaktuar; ndryshe thuhet se kanë pjerrësi ∞.

Duke patur parasysh përcaktimet e pjerrësisë dhe prerjeordinatës së një drejtëze, për të ndërtuar drejtëzën me pjerrësi të dhënë m dhe prerjeordinatë të dhënë b, që e shënojmë $p_{m,b}$, ndjekim këtë procedurë (Fig.2): ndërtojmë radhazi pikën (m, m) mbi drejtëzën njësi OI, pikën $M(1, 0)$ mbi ℓ^{I}_{OY}, drejtëzën OM, pikën $B'(0,b)$, nëpër të kalojmë drejtëzën r paralele me OM; kjo është drejtëza e kërkuar $p_{m,b}$. Procedurën e mësipërme mund ta përmbledhim në trajtë

$$\left.\begin{array}{l} (m,m)\in OI; \\ M(1,m)\in \ell^{I}_{OY}; \\ OM; \\ B'(0,b); \\ r\parallel OM \wedge B'\in r \end{array}\right] \Rightarrow \; p_{m,b}=r. \tag{8}$$

3.2. Një veprim ternar në bashkësinë S të koordinatave të planit afin. Ekuacioni i drejtëzës

Le të jetë $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një plan afin i koordinatizuar nga sistemi koordinativ (O, I, OX, OY, OI) me anë të pasqyrimit bijektiv $\mathcal{P}\rightarrow S\times S$. Për çdo treshe simbolesh $(a, m, b)\in S^3$, në planin afin të koordinatizuar $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ndërtojmë pikën $A(a, a)$ dhe drejtëzën p me pjerrësi m dhe prerjeordinatë b (Fig. 3). Meqenëse drejtëza $p\notin K_{OY}$, sepse ka pjerrësi të përcaktuar m, ekziston pika e vetme $P = p\cap \ell^{A}_{OY}$. Le të jetë ordinata e pikës P simboli $c\in S$. I shoqërojmë treshes $(a, m, b)\in S^3$ simbolin $c\in S$, që është i vetëm si ordinatë e pikës P. Përftojmë në këtë mënyrë veprimin ternar $t:S^3\rightarrow S$, përcaktuar nga $t(a,m,b)=c$, $\forall\,(a, m, b)\in S^3$.

Përkufizim 3.2.1. *Në kushtet e mësipërme veprimin ternar* $t:S^3\rightarrow S$, *përcaktuar nga* $(a,m,b)\mapsto c$, $\forall\,(a, m, b)\in S^3$, *e quajmë veprim ternar planar.*

Sipas këtij Përkufizimi, për çdo $(a, m, b)\in S^3$ mund të shkruajmë

$$\left.\begin{array}{l} A(a,a); \\ p_{m,b}; \\ ordinata\ e\ p_{m,b} \cap \ell_{OY}^{A} = c \end{array}\right] \Leftrightarrow t(a,m,b) = c\,. \qquad (9)$$

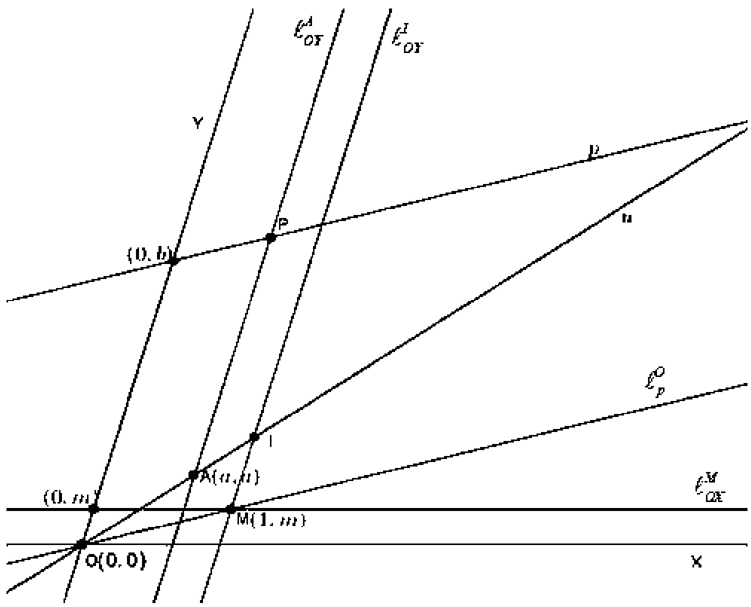

Fig. 3

Përkufizim 3.2.2. *Ekuacioni me dy ndryshore $F(x, y)=0$ mbi bashkësinë $S\times S$ e quajmë ekuacion i drejtëzës së çfarëdoshme ℓ të planit afin të koordinatizuar $\mathcal{A}$, në qoftë se ai vërtetohet vetëm nga koordinatat e çdo pike $M(x, y)$ incidente me ℓ.*

Futja e veprimit ternar planar t në S sipas Përkufizimit 3.2.1. bën të mundur gjetjen e ekuacionit për çdo drejtëz $p_{m,b}$ nga plani i koordinatizuar afin $\mathcal{A}$.

Është e qartë se ekuacioni i boshtit të abshisave është $y=0$, i boshtit të ordinatave është $x=0$ dhe i drejtëzës njësi OI është $x=y$; drejtëzat nga klasa K_{OX} e ekuivalencës kanë ekuacion $y=b$, $b\in S$, drejtëzat nga klasa K_{OY} e ekuivalencës kanë ekuacion $x=a$, ndërsa drejtëza e pjerrësive ka ekuacionin $x=1$ (Fig.3). Në përgjithsi, për një drejtëz $p_{m,b}$ me pjerrësi m dhe me prerjeordinatë b, ekuacioni i saj ka pamjen

$$y=t(x,m,b) \qquad (10)$$

mbasi , sipas (9), atë e vërtetojnë koordinatat e çdo pike $M(x, y) \in p_{m,b}$ dhe nuk e vërtetojnë pikat e tjera joincindente me drejtëzën $p_{m,b}$ (Fig.3).

Shembull 3.2.1. Për ilustrim bëjmë koordinatizimin e një plani afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ të fundëm të rendit 3-të (n=3), që, sipas Pohimit 2.2.5, ka 3^2 = 9 pika, 3^2 +3 =12 drejtëza, ku çdo drejtëz është incidente me 3 pika dhe çdo pikë është incidente me 3+1=4 drejtëza.

Le të jetë $\mathcal{P}=\{P_1, P_2, \dots, P_9\}$, $\mathcal{L}=\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{12}\}$ dhe incidenca $\mathcal{I}$ përkatësia e zakonshme, ku

$\ell_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$, $\ell_2 = \{P_4, P_5, P_6\}$, $\ell_3 = \{P_7, P_8, P_9\}$,

$\ell_4 = \{P_1, P_4, P_7\}$, $\ell_5 = \{P_2, P_5, P_8\}$, $\ell_6 = \{P_3, P_6, P_9\}$,

$\ell_7 = \{P_3, P_5, P_7\}$, $\ell_8 = \{P_2, P_4, P_9\}$, $\ell_9 = \{P_1, P_6, P_8\}$,

$\ell_{10} = \{P_1, P_5, P_9\}$, $\ell_{11} = \{P_2, P_6, P_7\}$, $\ell_{12} = \{P_3, P_4, P_8\}$.

Struktura $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ilustrohet në Fig. 4, nga e cila vihet re se $\mathcal{A}$ është një plan afin. E koordinatizojmë atë duke zgjedhur sistemin koordinativ $(P_1, P_2, \ell_1, \ell_4, \ell_{10})$ dhe duke marrë si bashkësi të koordinatave $S=\{0, 1, 2\}$. Atëherë kemi $P_1(0, 0)$, $P_5(1, 1)$, $P_9(2, 2)$. Nga (6) del se drejtëzat ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 janë me pjerrësi 0, drejtëzat ℓ_4, ℓ_5, ℓ_6 janë me pjerrësi ∞, drejtëzat ℓ_7, ℓ_8, ℓ_9 janë me pjerrësi 2 dhe drejtëzat $\ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{12}$ janë me pjerrësi 1.
Ndërkaq, sipas (4), pikat e tjera të bashkësisë P kanë koordinata: $P_2(1,0)$, $P_3(2,0)$, $P_4(0,1)$, $P_6(2,1)$, $P_7(0,2)$, $P_8(1,2)$, $P_9(2,2)$.

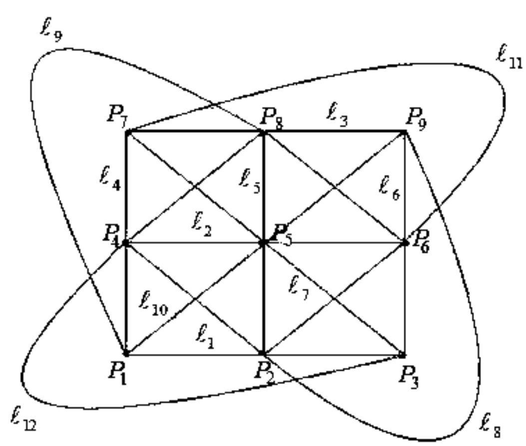

Fig.4

Mund të gjenden dhe ekuacionet e çdo drejtëze. P.sh. drejtëza ℓ_9 ka ekuacion $y=t(x,2,0)$, sepse, veç pjerrësisë m=2, nga (7) ka prerjeordinatë b=0.

3.3. Lidhja e një unaze ternare planare me një plan afin

Përcaktimi i veprimit ternar planar sipas Përkufizimit 3.2.1 si dhe Përkufizimi 1.5.1 na lejojnë të vërtetojmë këtë

TEOREMË 3.3.1. ***Në qoftë se S është bashkësia e koordinatave të një plani afin të koordinatizuar*** $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***dhe t është veprimi ternar planar në S, atëherë (S, t) është një unazë ternare planare.***

Vërtetim. Bashkësia S e simboleve përmban të paktën dy simbole të ndryshëm 0 dhe 1. Nga kushti, t është një veprim ternar në S, prandaj ngelet të tregojmë se plotësohen aksiomat A1-A5 të Përkufizimit 1.5.1.

1. Sipas (9), $t(0, m, b)$ është ordinata e pikëprerjes së një drejtëze p me pjerrësi m dhe me prerjeordinatë b me drejtëzën e klasës K_y që kalon nga origjina $O(0,0)$, prandaj $t(0, m, b)=b$ (Fig.5). Po ashtu, $t(a, 0, b)$ është ordinata e pikëprerjes së një drejtëze ℓ_1 me pjerrësi 0 dhe me prerjeordinatë b me drejtëzën ℓ_2 të klasës K_y që kalon nga pika $(a, 0)$, d. m. th. ordinata e pikës $P=\ell_1 \cap \ell_2$, që gjithashtu e ka ordinatën b, prandaj $t(a, 0, b)=b$.

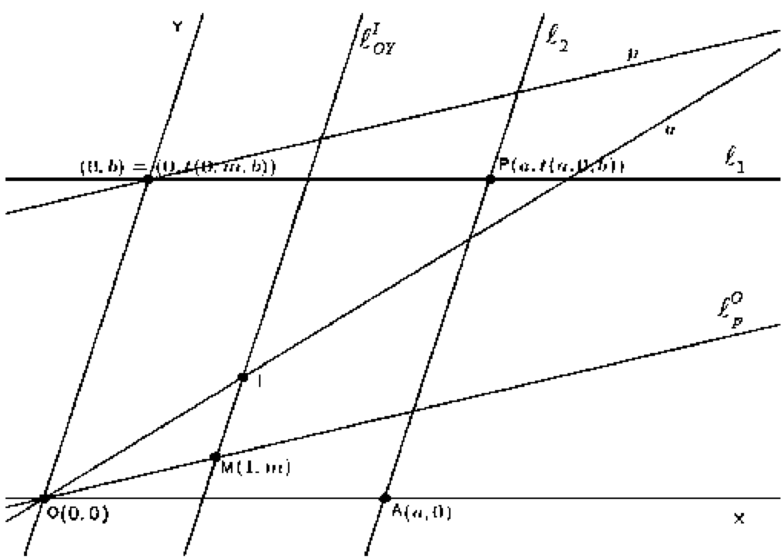

Fig. 5

2. Sipas (9), $t(a, 1, 0)$ është ordinata e pikëprerjes të drejtëzës $\ell \in K_y$, që kalon nëpër pikën $(a, 0)$, me drejtëzën njësi u. Meqenëse ajo pikë ka koordinata (a, a), atëherë $t(a, 1, 0) = a$. Po ashtu $t(1, a, 0)$ është ordinata e pikëprerjes së drejtëzës ℓ_1 me drejtëzën s, ku ℓ_1 është drejtëza me pjerrësi a dhe prerjeordinatë 0, ndërsa s është drejtëza e pjerrësive (Fig.6). Prandaj edhe $t(1, a, 0)=a$.

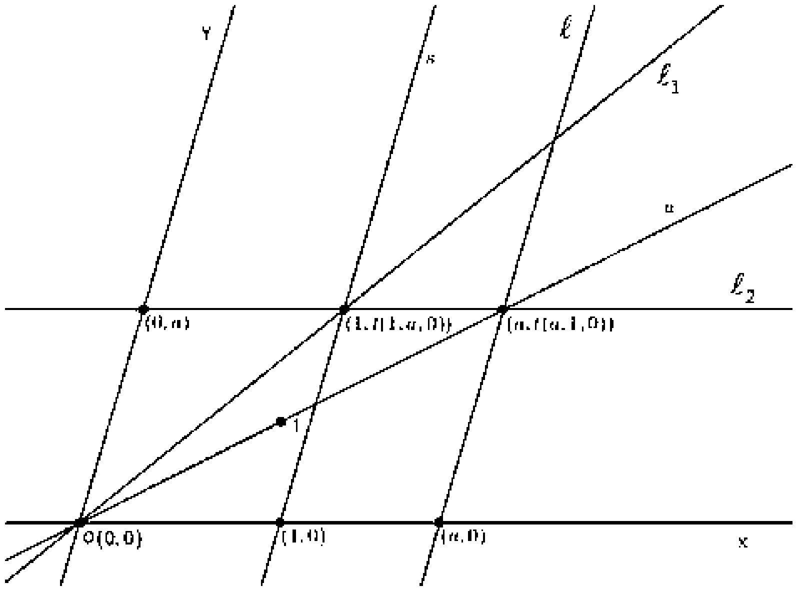

Fig. 6

3. Le të jenë p një drejtëz me pjerrësi m dhe prerjeordinatë b dhe q një drejtëz me pjerrësi m' dhe prerjeordinatë b'. Me qenë se $m \neq m'$, drejtëzat p dhe q priten në një pikë të vetme $P(a, c)$, ku $c=t(a, m, b) = t(a, m', b')$. Kjo tregon se a nga S është zgjidhja e vetme e ekuacionit $t(x, m, b) = t(x, m', b')$ (Fig.7).

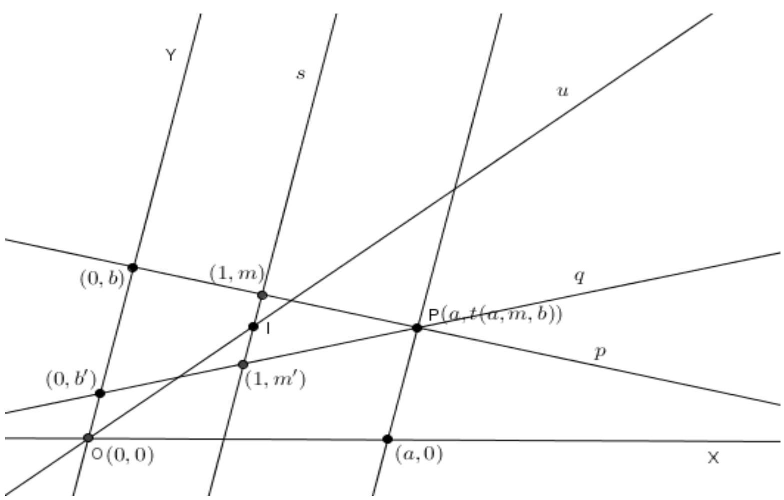

Fig. 7

4. Le të jenë $a, a', b, b' \in S$, ku $a \neq a'$. Shqyrtojmë sistemin:

$$\left.\begin{aligned} t(a, x, y) &= b \\ t(a', x, y) &= b' \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Le të jenë P dhe Q dy pika të tilla që $P(a,b)$ dhe $Q(a', b')$. Nga $a \neq a'$, ekziston vetëm një drejtëz PQ , e cila nuk i takon klasës K_y. Po ta shënojmë me m pjerrësinë e drejtëzës PQ dhe me k prerjeordinatën e saj, atëherë ekuacioni i drejtëzës PQ do të jetë $y=t(x, m, k)$. Por $P,Q \in PQ$,

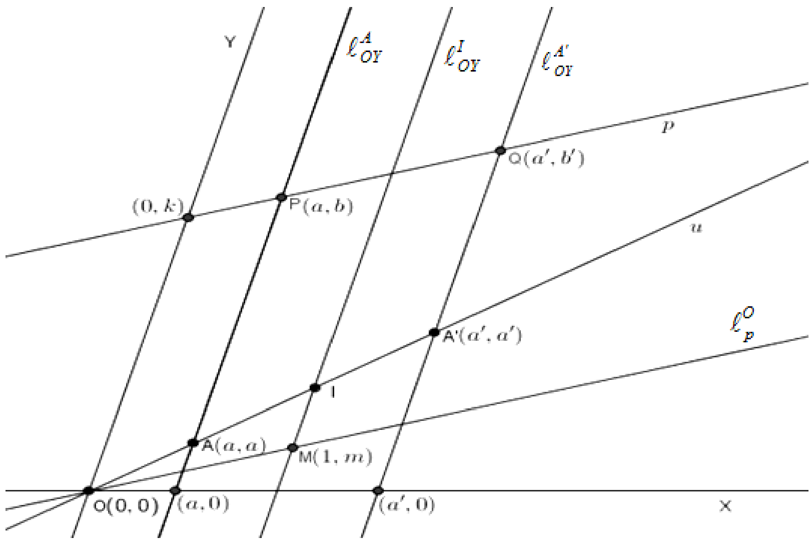

Fig. 8

prandaj kemi $b=t(a, m ,k)$ dhe $b'=t(a', m, k)$. Me qenë se drejtëza PQ me pjerrësi m dhe prerjeordinatë k është e vetme, treguam kështu që ekziston vetëm një çift $(m, k) \in S^2$ që është zgjidhje e sistemit (*) (Fig.8).

5. Ekziston vetëm një drejtëz p me pjerrësi m, që kalon nëpër pikën $P(a ,c)$ (Fig.9). Le të jetë $p \cap OY = B(0, b)$. Atëherë ekuacioni i drejtëzës p është $y=t(x, m, b)$. Me qenë se pika $P(a, c) \in p$, koordinatat e saj e vërtetojnë ekuacionin $y=t(x, m, b)$, pra $c=t(a, m, b)$. Kjo tregon se ekziston vetëm një $b \in S$, zgjidhje e ekuacionit $t(a, m, x)=c$.

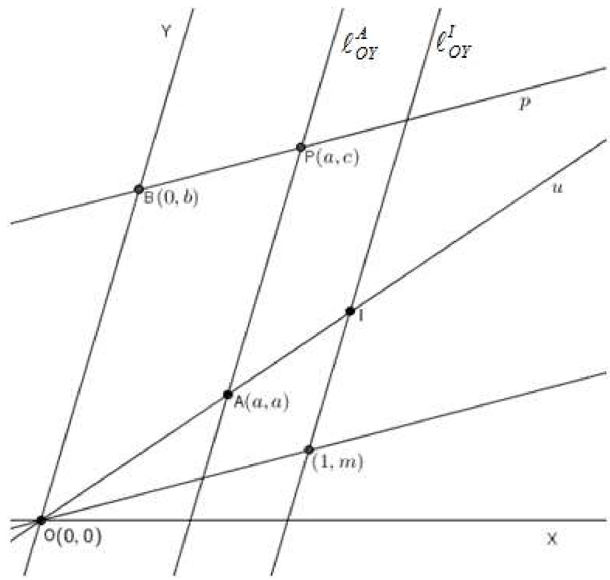

Fig. 9

Tregohet se vlen edhe Teorema e anasjellë e Teoremës 3.3.1 dhe pikërisht

TEOREMË 3.3.2. [14] ***Në qoftë se* (*S, t*) *është një unazë ternare planare, atëherë*** S ***është bashkësia e koordinatave të një planit afin të koordinatizuar*** $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) ***dhe*** t ***është veprimi ternar planar në*** S**.**

3.4. Mbledhja dhe shumëzimi në $\mathcal{P}_u$ dhe në S

Le të jetë $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) një plan afin, i koordinatizuar nga sistemi koordinativ (O, I, OX, OY, OI) e nga bijeksioni $\sigma : \mathcal{P}_u \to S$, dhe ($S$, t) unaza ternare planare e tij.

1. Mbledhja në $\mathcal{P}_u$

Le të jenë A(a, a) dhe B(b, b) dy pika të çfarëdoshme të $\mathcal{P}_u$ (Fig.10). Shënojmë:

$\ell_1 = \ell_{OX}^{B} \in K_O$, $\ell_2 = \ell_u^{B'} \in K_u$, ku $B'(0, b)$, $\ell_3 = \ell_{OY}^{A} \in K_{OY}$, e cila pret drejtëzën ℓ_2 në një pikë, që e shënojmë P, $\ell_4 = \ell_{OX}^{P} \in K_{OX}$. Drejtëza e fundit, si e tillë, pret drejtëzën njësi u në një pikë të vetme C (Fig.10). Duke i shoqëruar çiftit (A, B)$\in$ $\mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$ pikën $C \in \mathcal{P}_u$, përftojmë një pasqyrim $\oplus : \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u \to \mathcal{P}_u$ **.**

Përkufizim 3.4.1. *Në kushtet e mësipërme, pasqyrimin* $\oplus : \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u \to \mathcal{P}_u$, *përcaktuar nga* (*A*, *B*)$\mapsto$*C për çdo* (*A*, *B*)$\in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$ *e quajmë mbledhje në* $\mathcal{P}_u$, *kurse shembëllimin C të çiftit* (*A*, *B*) *e shënojmë* $A \oplus B$ *dhe e quajmë shumë e pikës A me pikën B.*

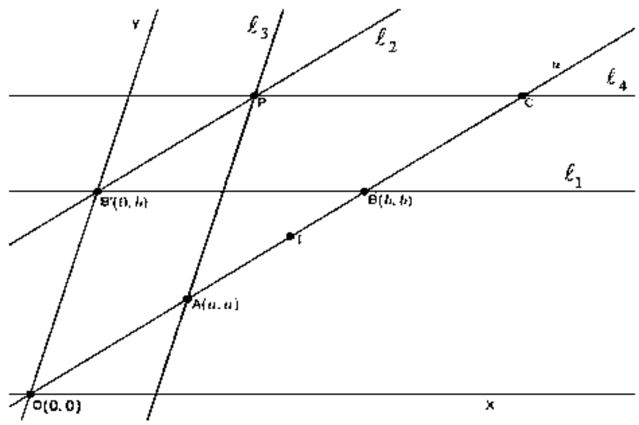

Fig. 10

2. Mbledhja në *S*

Le të jenë *a* dhe *b* dy simbole të çfarëdoshme nga *S*. Duke patur parasysh (2), sipas bijeksionit σ: $\mathcal{P}_u \to S$, ekziston vetëm një çift pikash (*A, B*)$\in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$ i tillë që *A*(*a,a*) dhe *B*(*b,b*), ku *a*=σ(*A*) dhe *b*=σ(*B*). Le të jenë (*c*, *c*) koordinatat e shumës $A \oplus B = C$, d.m.th. *c* =$\sigma(A \oplus B) \in S$. Duke i shoqëruar çiftit (*a,b*)$\in S \times S$ simbolin e vetëm *c* = $\sigma(A \oplus B) \in S$ përftojmë një pasqyrim +: $S \times S \to S$.

Përkufizim 3.4.2. *Në kushtet e mësipërme, pasqyrimin* +: $S \times S \to S$, *përcaktuar nga* (*a*, *b*)$\mapsto$*c*, *për çdo* (*a*, *b*)$\in S \times S$, *ku a*=σ(*A*), *b*=σ(*B*) *dhe c* =$\sigma(A \oplus B)$, *e quajmë mbledhje në S, kurse shembëllimin c e çiftit* (*a*, *b*) *e shënojmë a+b dhe e quajmë shumë* e *a me b.*

Nga ky përkufizim kemi: $\forall$ (*A*, *B*)$\in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$, $\sigma(A \oplus B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Kjo tregon se vlen kjo:

TEOREMË 3.4.1. ***Në planin afin*** $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$)***, koordinatizuar nga sistemi koordinativ*** (*O*, *I*, *OX*, *OY*, *OI*) ***dhe nga bijeksioni*** $\sigma : \mathcal{P}_u \to S$, ***bijeksioni*** σ ***është izomorfizëm i grupoidit*** **(**$\mathcal{P}_u$, $\oplus$**)** ***në grupoidin*** **(***S*, **+)**.

Vlen gjithashtu dhe kjo:

TEOREMË 3.4.2. ***Mbledhja + në bashkësinë e koordinatave*** S ***shprehet me anë të veprimit ternar planar*** t ***nga barazimi***

$$a+b=t(a,1,b).\ \forall (a,b)\in S\times S, \tag{11}$$

Vërtetim. Nga Përkufizimet 3.4.2 dhe 3.3.1 (krahaso Fig. 10 me Fig. 3), shuma $a+b$ është ordinatë e pikëprerjes së drejtëzës $\ell_2 = \ell_u^{B'} \in K_u$, që kalon nga $B'(0, b)$ dhe është paralele me drejtëzën njësi u, me drejtëzën e klasës K_{OY} , që kalon nëpër pikën A' $(a, 0)$. Kjo do të thotë se ka vend barazimi $a+b=t(a, 1, b)$.

Meqenëse drejtëza me pjerrësi 1 dhe me prerjeordinatë b ka ekuacion $y=t(x, 1, b)$ dhe, sipas (11), $t(x, 1, b)=x+b$, ekuacioni i kësaj drejtëze merr pamjen e thjeshtuar $y=x+b$. Ka vend kështu ky:

RRJEDHIM. ***Në planin afin të koordinatizuar*** $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***drejtëza me pjerrësi*** 1 ***dhe me prerjeordinatë b ka ekuacion y=x+b.***

3. Shumëzimi në $\mathcal{P}_u$

Le të jenë $A(a,a)$ dhe $B(b,b)$ dy pika të çfarëdoshme të $\mathcal{P}_u$ (Fig.11). Shënojmë: $\ell = \ell_{OX}^{B} \in K_{OX}$, e cila e pret drejtëzën e pjerrësive s në pikën $(1,b)$, ℓ_1 drejtëzën, që kalon nga pikat $(1,b)$ dhe $O(0,0)$, e cila ka pjerrësi 1 dhe prerjeordinatë 0, $\ell_2 = \ell_{OY}^{A} \in K_{OY}$, e cila pret drejtëzën ℓ_1 në një pikë, që e shënojmë P, $\ell_3 = \ell_{OX}^{P} \in K_{OX}$. Kjo e fundit, si e tillë, pret drejtëzën njësi u në një pikë të vetme C (Fig.11). Duke i shoqëruar çiftit $(A,B)\in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$ pikën $C\in \mathcal{P}_u$, përftojmë një pasqyrim $*$: $\mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u \to \mathcal{P}_u$.

Përkufizim 3.4.3. *Në kushtet e mësipërme, pasqyrimin* $*: \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u \to \mathcal{P}_u$, *përcaktuar nga* $(A, B)\mapsto C$ *për çdo* $(A, B)\in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$ *e quajmë shumëzim në* $\mathcal{P}_u$, *kurse shembëllimin C e çiftit* (A, B) *e shënojmë* $A*B$ *dhe e quajmë prodhim i pikës A me pikën B.*

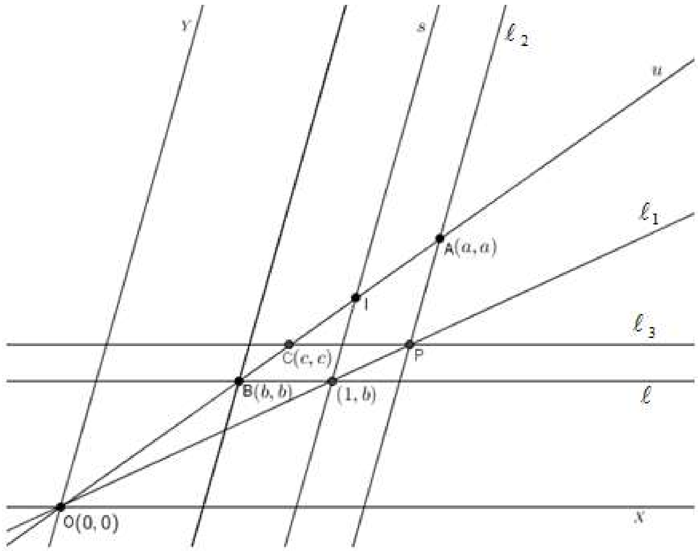

Fig.11

4. Shumëzimi në *S*.

Për çdo *a, b* nga *S*, ekziston vetëm një çift pikash $(A, B) \in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$ i tillë që *A*(*a, a*) dhe *B*(*b, b*), ku *a*=$\sigma(A)$ dhe *b*=$\sigma(B)$. Le të jenë (*c, c*) koordinatat e prodhimit $A * B = C$, d. m. th. *c* =$\sigma(A * B)$ $\in S$. Duke i shoqëruar çiftit $(a, b) \in S \times S$ simbolin e vetëm *c* = $\sigma(A * B) \in S$ përftojmë një pasqyrim $\cdot : S \times S \to S$.

Përkufizim 3.4.4. *Në kushtet e mësipërme, pasqyrimin* $\cdot : S \times S \to S$, *përcaktuar nga* $(a, b) \mapsto c$, *për çdo* $(a, b) \in S \times S$, *ku* $a = \sigma(A)$, $b = \sigma(B)$ *dhe* $c = \sigma(A * B)$, *e quajmë shumëzim në S, kurse shembëllimin c e çiftit* (*a*, *b*) *e shënojmë* $a \cdot b$ *dhe e quajmë prodhim i a me b.*

Nga ky përkufizim kemi: $\forall (A, B) \in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$, $\sigma(A * B) = a \cdot b$, ku $a = \sigma(A)$, $b = \sigma(B)$, që sjell $\sigma(A * B) = \sigma(A) \cdot \sigma(B)$. Kjo tregon se vlen kjo:

TEOREMË 3.4.3. ***Në planin afin*** $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ***koordinatizuar nga sistemi koordinativ (O, I, OX, OY, OI) dhe nga bijeksioni*** $\sigma : \mathcal{P}_u \to S$, ***bijeksioni*** σ ***është izomorfizëm i grupoidit*** $(\mathcal{P}_u, *)$ ***në grupoidin*** $(S, \cdot)$.

Vërtetim. Nga Përkufizimi 3.4.4 kemi që për çdo $(A,B) \in \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_u$, $\sigma(A * B) = a \cdot b$, ku $a = \sigma(A)$, $b = \sigma(B)$. Kjo sjell $\sigma(A * B) = \sigma(A) \cdot \sigma(B)$.

Në mënyrë analoge si me Teoremën 3.4.2 tregohet se vlen edhe kjo

TEOREMË 3.4.4. ***Shumëzimi*** $\cdot$ ***në bashkësinë e koordinatave*** S ***shprehet me anë të veprimit ternar planar*** t ***nga barazimi***

$$\forall\,(a,b)\in S\times S,\ a\cdot b = t(a,b,0). \tag{12}$$

Nga (12), për b=0 marrim $a\cdot 0 = t(a,0,0)$, kurse, meqenëse (S, t) është unazë ternare plane, nga aksioma A1 kemi $t(a,0,0)=0$. Kjo sjell $a\cdot 0=0$. Po nga (12) dhe A1, për a=0 marrim $0\cdot b = t(0,b,0)$ = 0. Del kështu i vërtetë pohimi $\forall\, a\in S,\ a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$. Po ashtu nga (12) dhe aksioma A2, për $b=1$ marrim $a\cdot 1 = t(a,1,0)=a$, kurse për $a=1$ marrim $1\cdot b = t(1,b,0)=b$. Del kështu i vërtetë pohimi $\forall\, a\in S,\ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$.

Përftojmë kështu këtë

RRJEDHIM. ***Në një plan afin*** $\mathcal{A}$ ***të koordinatizuar, për çdo*** $a\in S$ ***kemi***

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0 \tag{12'}$$

$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a \tag{12''}$$

Së fundi, nga Teorema 3.4.1, Teorema 3.4.3 dhe kuptimi i izomorfizmit të strukturave me dy veprime binare [1], përftojmë edhe këtë

TEOREMË 3.4.5. ***Struktura*** **(**$\mathcal{P}_u$ **,** $\oplus$ **,** $*$**)** ***është izomorfe me strukturën*** **(**S**, +,** $\cdot$**)**.

3.5. Plani i Desargut dhe disa izomorfizma

Në planin afin euklidian ka vend ky

POHIM D1. (Aksioma I e Desargut) ***Në qoftë se AB , A'B', A''B'' janë tri drejtëza paralele*** (Fig. 12)***, atëherë***

$$\left.\begin{array}{l} A\,A' \parallel B\,B', \\ A'A'' \parallel B'B'' \end{array}\right] \Rightarrow AA'' \parallel BB''.$$

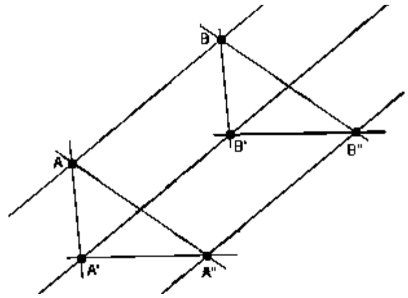

Fig. 12

Ka plane afine, ku nuk vlen Pohimi D1. I tillë është plani i Moultonit siç tregohet në shembullin e mëposhtëm.

Shembull 3.5.1. Le të jet*ë* $\boldsymbol{R}^2$ plani euklidian i koordinatizuar nga sistemi karezian kënddrejtë oxy. Quajmë plan të Moultonit strukturën e incidencës ($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) të përcaktuar si më poshtë:

1. Pikat e $\mathcal{P}$ janë pikat e $\boldsymbol{R}^2$.

2. Drejtëzat e $\mathcal{L}$ janë bashkësitë e pikave (*x*, *y*), që kënaqin kushtet:

   a) $x=a$ për çdo *a* të fiksuar reale;

   b) $y=b$ për çdo *b* të fiksuar reale;

   c) drejtëzat euklidiane $y=mx+b$, ku m<0;

   d) drejtëzat e thyera y= $\begin{cases} \frac{1}{2}m(x-a), \text{ për } y \geq 0; \\ m(x-a), \text{ për } y < 0. \end{cases}$

3. Incidenca është perkatësia e zakonëshme e ekementit në bashkësi.

Provohet lehtë plani i Moultonit (Fig. 13.*a*) është plan afin.

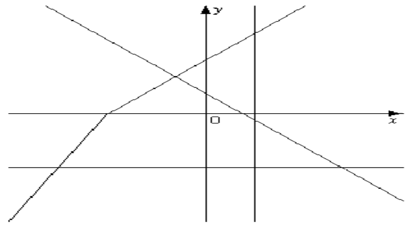

Fig.13.*a*

Nga Fig. 13.*b* duket që, megjithëse për drejtëzat AB , $A'B'$, $A''B''$ në planin e Moultonit kemi $A\ A' \parallel B\ B'$ dhe $A'A'' \parallel B'B''$, drejtëzat AA'', BB'' nuk janë paralele.

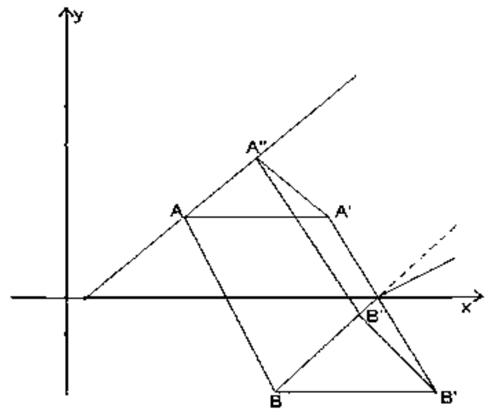

Fig.13.*b*

Pohimi $D1$ njihet si aksioma e parë e Desargut.

Përkufizim 3.5.1. *Një plan afin, të plotësuar me aksiomën* $D1$ të Desargut do ta quajmë *plan të Desargut.*

Për studimin e një plani desargian, që e shënojmë dhe $\mathcal{D}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, futet kuptimi vektorit $\overrightarrow{AB}$ si çifti i radhitur (A, B) i dy pikave të çfardoshme të $\mathcal{P}$, ku pika A quhet *fillim*, pika B quhet *mbarim* dhe drejtëza AB quhet *mbështetësja* e tij. Pra, kuptimi i vektorit nuk ndryshon nga ai i dhënë në [89]. Prandaj, si atje, duke përdorur aksimat $A1$, $A2$, $A3$, $D1$, arrihet në përfundimin se *grupidi* (V, +) *është grup komutativ* (*abeljan*), *ku* V *është bashkësia e vektorëve të planit desargian dhe mbledhja + përcaktohet nga rregulla e trekendëshit* (Fig. 14),

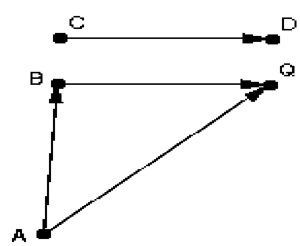

Fig. 14

d. m. th.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \text{ nëse } B=C, \\ \overrightarrow{AQ}, \text{ ku } Q \text{ e tillë që } \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BQ}, \text{ nëse } B\neq C.\end{cases}$$

Shqyrtojmë bashkësinë $V_O = \{\overrightarrow{OZ} \mid Z \in \mathcal{P}_u\}$ të vektorëve me mbajtëse drejtëzën njësi u dhe me fillim të njejtë origjinën O. Duke shënuar me U në Fig.14 pikëprerjen e drejtëzës incidente me pikën B dhe paralele me boshtin OX (pikën $\ell_{OX}^{B} \cap OY = B'$ në Fig. 10), vihet re lehtësisht se $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{UP} = \overrightarrow{BC}$, ku $C = \ell_{OX}^{P} \cap u$. Prandaj $\forall \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V_0$ kemi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \in V_0 . \tag{13}$$

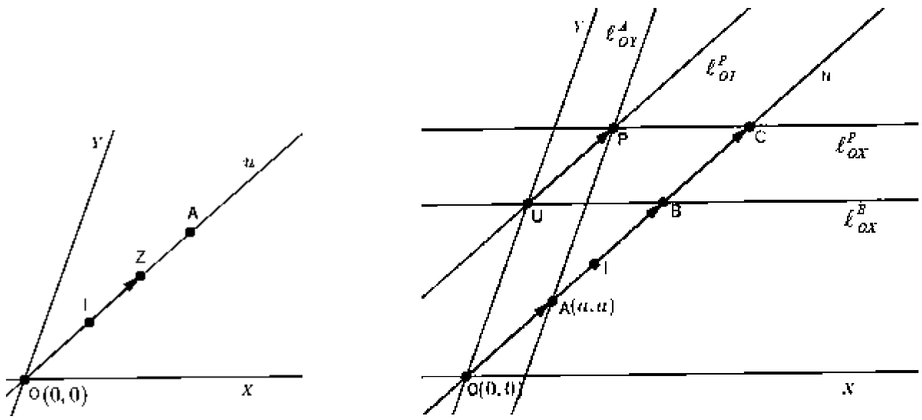

Fig. 15

Kjo tregon se V_0 është nënbashkësi e qëndrueshme e V lidhur me mbledhjen: $V_O \overset{+}{\subset}_q V$. Veç kësaj, si më sipër, tregohet se $\forall\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V_0$ kemi gjithashtu $\overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) \in V_0$. Nga kjo rezulton [89], se nëstruktura (V_0, +) e grupit (V, +) është nëngrup i tij. Në këtë mënyrë kemi vërtetuar këtë

POHIM 3.5.1. ***Nënstruktura*** (V_0, +) ***e grupit abeljan*** (V, +) ***është grup abeljan.***

Tregojmë tani se ka vend kjo

TEOREMË 3.5.1. ***Në planin desargian*** $\mathcal{D}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$), ***koordinatizuar nga sistemi koordinativ*** (O, I, OX, OY, u), ***grupi abeljan*** **(**V_O, **+)** ***është izomorf me grupoidin*** ($\mathcal{P}_u$, $\oplus$).

Vërtetim. Shqyrtojmë $V_O = \{\overrightarrow{OZ} \mid Z \in \mathcal{P}_u\}$. I shoqërojmë vektorit $\overrightarrow{OZ} \in V_O$ pikën $Z \in \mathcal{P}_u$. Është përftuar kështu një bijeksion $\varphi : V_O \to \mathcal{P}_u$ (Fig. 15) i tillë që

$$\varphi(\overrightarrow{OZ}) = Z \tag{14}$$

Sipas Përkufizimit 3.4.2, kemi $A\oplus B = C$, ku $C=\ell_{OX}^{P}\cap u$. Atëherë, sipas (13) dhe (14), kemi $\varphi(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\varphi(\overrightarrow{OC})=C=A\oplus B$ dhe $\varphi(\overrightarrow{OA})\oplus\varphi(\overrightarrow{OB}) = A\oplus B$.

Prej nga marrim

$$\varphi(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\varphi(\overrightarrow{OA})\oplus\varphi(\overrightarrow{OB}) \tag{15}$$

Barazimi (15) tregon se grupi abeljan $(V_O, +)$ është izomorf me grupoidin $(\mathcal{P}_u, \oplus)$, prandaj edhe ky i dyti është grup abeljan [89].

TEOREMË 3.5.2. ***Në planin e Desargut*** $\mathcal{D}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ***koordinatizuar nga sistemi koordinativ*** (O, I, OX, OY, u) ***dhe nga bijeksioni*** $\sigma:\mathcal{P}_u\to S$, ***grupoidi*** $(S, +)$ ***është grup abeljan.***

Vërtetim. Nga Teorema 3.5.1 kemi $(V_O, +)\cong(\mathcal{P}_u, \oplus)$, kurse nga Teorema 3.4.1 kemi $(\mathcal{P}_u, \oplus)\cong(S, +)$. Prej këndej rezulton se $(V_O, +)\cong(S, +)$ [89]. Nga Pohimi 3.5.1, $(V_O, +)$ është grup abeljan, prandaj edhe $(S, +)$ është grup abeljan [1].

3.6. Unaza ternare planare si një unazë e zakonshme

Përkufizim 3.6.1. *Veprimin ternar planar* t: $S^3\to S$, *përcaktuar nga* $(a, m, b)\mapsto a\cdot m+b, \forall (a, m, b)\in S^3$, *e quajmë veprim ternar linear, kurse unazën ternare planare* (S, t) *e quajmë unazë ternare lineare.*

Nga ky përkufizim vihet re se në qoftë se t: $S^3\to S$ është veprim ternar linear, atëherë

$$\forall (a, m, b)\in S^3,\ t(a, m, b)= a\cdot m+b \tag{16}$$

Me anë të barazimit (16) veprimi ternar linear t shprehet nëpërmjet veprimeve dyshe të mbledhjes + dhe të shumëzimit $\cdot$ në bashkësinë e koordinatave S të planit afin.

Kanë vend teoremat e mëposhtëme:

TEOREMË 3.6.1. ***Në qoftë se një plan afin*** $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ***i koordinatizuar është i Desargut, atëherë unaza ternare planare*** (S, t) ***e tij është unazë ternare lineare.***

Vërtetim. Le të jenë $\mathcal{D}$ plan i Desargut, i koordinatizuar nga sistemi (*O, I, OX, OY, u*) e nga bijeksioni $\sigma:\mathcal{P}_u \to S$ dhe *a, m, b*$\in S$ (Fig. 16). (Shënojmë A^* origjinën *O* dhe B^* pikën (0, *b*)). Ndërtojmë pikat *A*(*a, a*), *M*(*m, m*), *B*(*b, b*), drejtëzën *p* me ekuacion *y*=*t*(*x, m, b*) dhe drejtëzën *q*‖*p*, që kalon nga origjina, e cila sigurisht ka ekuacion *y*=*t*(*x, m,* 0). Sipas Përkufizimit 3.2.1, shëmbëllimi *t*(*a, m, b*) është ordinata e pikës $P=\ell_{OY}^{A} \cap \ell_{p}^{B'}$ (në Fig. 16 është shënuar B'). Sipas Përkufizimit 3.4.4, prodhimi $a\cdot m$ është ordinata e pikës $P=\ell_{OY}^{A} \cap \ell_1$ (shih Fig. 11), që në Fig. 16 është shënuar A' $(a, a\cdot m)$. Le të jetë $A''=\ell_{OX}^{A'} \cap u$. Atëherë kemi A'' $(a\cdot m, a\cdot m)$ dhe $A'A''\in K_{OX}$.

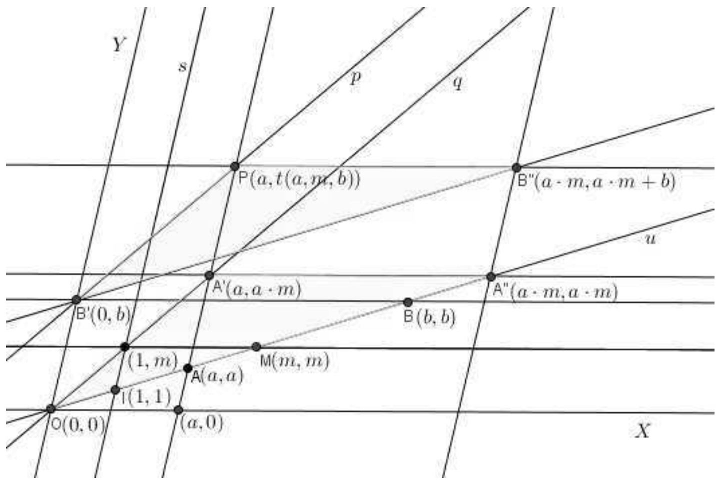

Fig.16.

Më tej, sipas Përkufizimit 3.4.2, shuma $a\cdot m$+b është ordinata e pikës $\ell_{OY}^{A''} \cap \ell_{u}^{B'}$, që në Fig. 16 është shënuar B''. Marrim kështu B'' $(a\cdot m, a\cdot m + b)$.

Shqyrtojmë tani treshet e pikave (*O*, A', A'') dhe (B', *P*, B''). Nga më sipër, drejtëzat OB', $A'P$, $A''B''$ janë nga klasa K_{OY} pra janë paralele; kemi gjithashtu dhe paralelizmin e drejtëzave $OA'' \parallel B'B''$ dhe $OA' \parallel B'P$. Atëherë, nga aksioma *D*1 rrjedh që $A'A'' \parallel PB''$. Pra, $PB'' \in K_{OX}$, rrjedhimisht pikat *P* dhe B'' kanë ordinata të njëjta, d.m.th. *t*(*a,m,b*)=*am*+*b*. Sipas (16), rezulton se (*S, t*) është unazë ternare lineare.

Prej këndej del e qartë se ekuacioni *y*=*t*(*x, m, b*) i drejtëzës në një plan të Desargut merr pamjen *y*=*mx* + *b*.

Ka vend dhe teorema e anasjellë:

TEOREMË 3.6.2. ***Në qoftë se unaza ternare planare*** (S, t) ***e një plani afin, të koordinatizuar është unazë ternare lineare, atëherë ai plan afin është i Desargut.***

Vërtetim. Le të jenë y, k, r drejtëza të planit afin $\mathcal{A}$ të klasës K_y, pra paralele ndërmjet tyre. Fiksojmë në y pikën O. Fiksojmë gjithashtu dy drejtëza të ndryshme x, u, që priten me y në O. Fiksojmë në u dhe pikën $I \neq O$. Formojmë kështu sistemin koordinativ (O, I, x, y, u) dhe lidhur me të unazën ternare planare (S, t) të planit afin $\mathcal{A}$. Më tej, përcaktojmë si në Fig.16 pikat B' në y, A' dhe P në k, A'' dhe B'' në r të tilla që $OA'' \parallel B'B''$ dhe $OA' \parallel B'P$. Meqenëse (S, t) është unazë ternare lineare, sipas (16) rezulton $t(a,m,b)=am+b$. Për rrjedhojë del $A'A'' \parallel PB''$. Kjo tregon se vlen D1, d. m. th. plani afin $\mathcal{A}$ është i Desargut.

TEOREMË 3.6.3. ***Në një unazë ternare lineare*** *(S, t)* ***shumëzimi është shpërndarës nga e djathta lidhur me mbledhjen.***

Vërtetim. Le të jenë a, b, $p \in S$. Nga (12’) dhe nga fakti që (S, +) është grup, në qoftë se një prej tyre është 0, pohimi vlen . Prandaj marrim a, b, $p \neq 0$. Le të jenë $A(a, a)$, $B(b, b)$ dhe $P(p, p)$ mbi u (Fig.17). Shqyrtojmë pikat $B'(0, b)$, $C^*(a, a+b)$, $C(a+b,a+b)$. Drejtëza $B'C^*$ ka ekuacionin $y=x+b$, rrjedhimisht $B'C^* \parallel u$, kurse ekuacioni i drejtëzës ℓ me pjerrësi p, që kalon nëpër pikën O është $y=xp$. Kjo drejtëz pret drejtëzën e klasës K_{OY} , e cila kalon nëpër B në pikën A' (b, bp). Shënojmë ℓ_1 drejtëzën me pjerrësi p dhe me prerjeordinatë bp, që për këto kushte ka ekuacion $y=xp+bp$.

Shqyrtojmë në Fig. 17 pikat $D(a, ap+bp)$ dhe D' ($a+b$, $ap+bp$). Vemë re se $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{A^*B'} + \overrightarrow{B'C^*} + \overrightarrow{C^*D} = \overrightarrow{A^*D} \Rightarrow \ell_1 \parallel A'D'$.

Por ℓ_1 dhe $\ell = OA'$ kanë pjerrësi të njejtë p, prandaj akoma $\ell_1 \parallel OA'$. Atëherë drejtëzat $A'D'$ dhe OA' përputhen. Kjo sjell që $D' \in OA'$, pra vërteton ekuacionin e saj $y=xp$, që tregon se ordinata e pikës D' me abshisë $a+b$ është $(a+b)p$. Në këtë mënyrë, nga njëra anë ordinata pikës D' ($a+b$, $ap+bp$) është $ap+bp$, nga ana tjetër është $(a+b)p$. Pra, $\forall\ a, b, p \in S$,

$$(a+b)p=ap+bp \qquad (17)$$

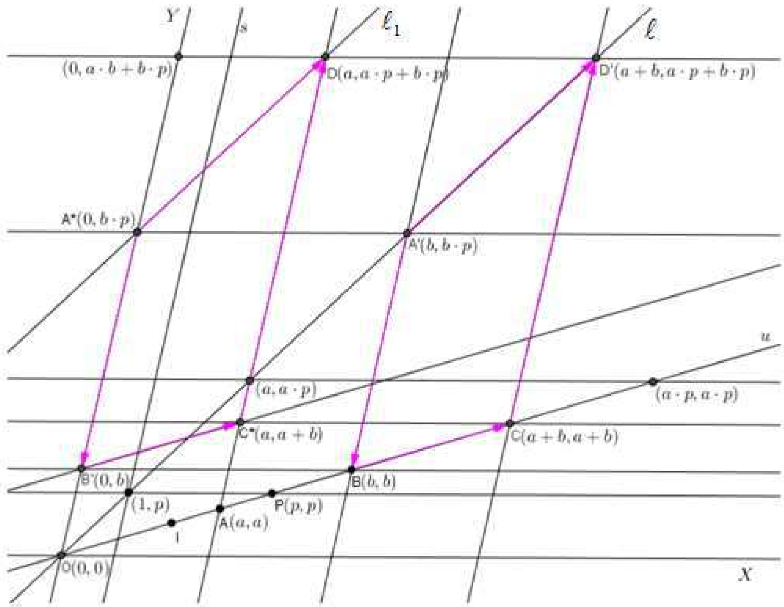

Fig. 17

Në një unazë ternare lineare (S, t) përgjithësisht shumëzimi nuk është shpërndarës nga e majta lidhur me mbledhjen. Ai është i tillë, në qoftë se plani i Desargut plotësohet me të ashtuquajturën *aksioma e dytë e Desargut*, që ka formulimin e më poshtëm.

POHIM D_2 (Aksioma II e Desargut). ***Le të jenë*** A, B, C, A', B', C', O ***pika të planit afin*** $\mathcal{A}$***. Në qoftë se treshet*** (A, B, C), (A', B', C') **janë jokolineare dhe drejtëzat** AA' , BB', CC' ***kalojnë nga pika*** O **(**Fig. 18**)*, atëherë***

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel A'B', \\ BC \parallel B'C' \end{matrix}\right] \Rightarrow AC \parallel A'C'.$$

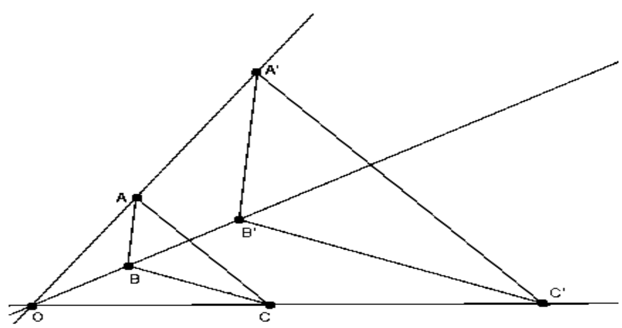

Fig. 18

TEOREMË 3.6.4. ***Në qoftë se në një plan afin*** $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ***të koordinatizuar vlen Pohimi D2, atëherë në unazën ternare planare (S, t) të tij për çdo a, b, c*** $\in S$ ***vlen barazimi***

$$t(a, b, ac)= at(1, b, c). \tag{18}$$

Vërtetim. Duke patur parasysh aksiomat e planit afin dhe barazimin (12′), tregohet me një herë se barazimi (18) vlen kur të paktën një nga a, b, c është 0. Le të jenë tani a, b, $c \neq 0$. Shënojmë ℓ drejtëzën me ekuacion $y=xc$ dhe me B pikën e saj me koordinata (1, c). Shënojmë gjithashtu me C pikën e planit afin me koordinata (1, t(1, b, c)) (Fig. 19). Në këto kushte drejtëza $\ell_1=OC$ ka pjerrësi t(1, b, c),

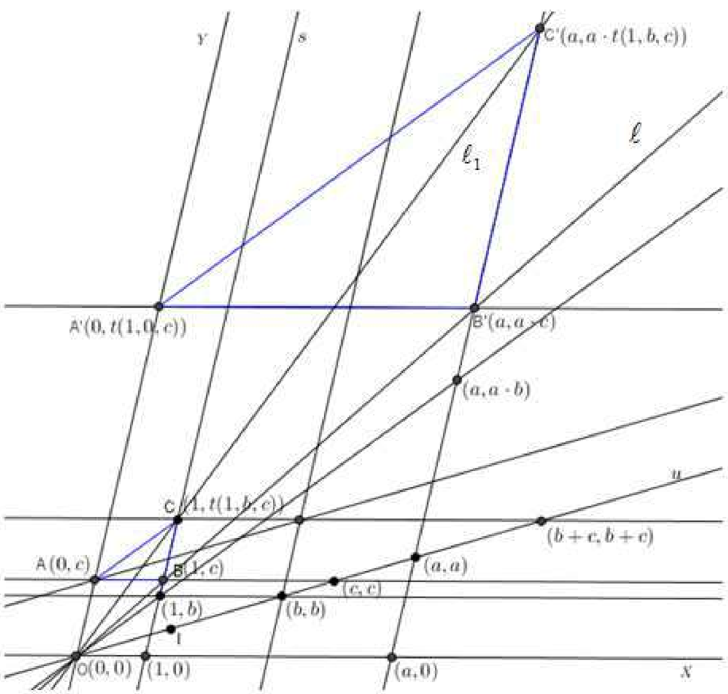

Fig. 19

prandaj ekuacioni i saj është $y=xt(1, b, c)$. Shënojmë me C' pikën me koordinata (a, at(1, b, c)). Le të jetë A(0, c) dhe $y=t(x, b^*, c)$ ekuacioni i AC. Në fakt kemi $b^*=b$. Me të vërtetë. Sikur $b^* \neq b$, nga aksioma A3 e unazës ternare planare, ekuacioni

$$t(x, b^*, c)=t(x, b, c) \tag{*}$$

ka zgjidhje të vetme. Nga $t(0, b^*, c)=c=t(0, b, c)$ rrjedh që $x=0$ është zgjidhje e ekuacionit (*). Nga ana tjetër, $C(1, t(1, b, c)) \in AC$ me ekuacion $y=t(x, b^*, c)$. Duke qenë se koordinatat e saj e vërtetojnë këtë ekuacion marrim barazimin $t(1, b, c)=t(1, b^*, c)$, që tregon se edhe $x=1$ është zgjidhje e ekuacionit (*). Arrijmë kështu në absurditetin 1=0. Prandaj ekuacioni i AC është $y=t(x, b, c)$. Shënojmë tani A' pikën e boshtit të ordinatave me koordinata

(0, t(1, 0, c)) dhe B' pikën e drejtëzës ℓ me koordinata (a, ac). Vemë re se pikat O, A, B, C, A', B', C' plotësojnë kushtet e D2, rrjedhimisht kemi $AC \| A'C'$, pra $A'C'$ ka të njejtën pjerrësi b me AC, prandaj ekuacioni i $A'C'$ ka pamjen $y=t(x,b,ac)$. Prej këndej, meqenëse $C'(a, at(1, b, c)) \in A'C'$ kemi $t(a, b, ac)=at(1, b, c)$.

TEOREMË 3.6.5. ***Në një unazë ternare lineare*** (S, t) ***të një plani afin*** $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ***ku vlen Pohimi D2, shumëzimi është shpërndarës edhe nga e majta lidhur me mbledhjen.***

Vërtetim. Meqenëse unaza ternare planare (S, t) është lineare, nga (16) kemi $t(1, b, c) = 1\cdot b+c$ dhe $t(a,b,ac)= ab+ac$. Meqenëse vlen edhe D2, nga (18) kemi $t(a, b, ac) = at(1, b, c)$. Për rrjedhojë marrim $a(b+c)=ab+ac$, sepse, nga (12''), $1\cdot b=b$. Nga Teorema 3.6.3 dhe Teorema 3.6.5 rezulton se shumëzimi është shpërndarës në unazën ternare lineare të një plani afin, ku vlejnë të dy aksiomat e Desargut.

TEOREMË 3.6.6. ***Në një unazë ternare planare*** (S, t) ***të një plani afin*** $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$***, ku vlen Pohimi D2, shumëzimi është shoqërues.***

Vërtetim. Rasti kur të paktën njëri nga simbolet a, b, c është 0 ose 1 është evident. Ndalemi në vërtetimin e rastit kur ato janë të ndryshme nga 0 dhe nga 1. Shqyrtojmë pikat $A(a,a)$, $B(b,b)$ dhe $C(c,c)$. Në këto kushte pikat A, B, C janë të ndryshme nga O dhe nga I.

Dallojmë këto raste:

1. Në treshen (a, b, c) nuk ka dy komponente të barabarta: $a\neq b\neq c$;

2. Ka vetëm dy komponente të barabarta: 2_1) $a=b\neq c$; 2_2) $a=c\neq b$; 2_3) $a\neq b=c$;

3. Të treja komponentet janë të barabarta: $a=b=c$.

Rasti 1**.** Në këtë rast në pikat A, B, C nuk ka dy koordinata të njejta.

Le të jenë ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 drejtëza, që kalojnë nga origjina O të tilla që ℓ_1 është me pjerrësi c, ℓ_2 me pjerrësi bc dhe ℓ_3 me pjerrësi b. Atëherë ato kanë ekuacione ℓ_1: $y=xc$, ℓ_2: $y=x(bc)$, ℓ_3: $y=xb$. Shënojmë $R\in \ell_1$ pikën me koordinata (b, bc) dhe $Q'\in \ell_2$ pikën me koordinata (a, $a(bc)$) dhe $P'\in \ell_3$ pikën me koordinata (a, ab). Vemë re se drejtëza ℓ_2 është incidente edhe me pikën $Q(1, bc)$, kurse drejtëza ℓ_3 është incidente edhe me pikën $P(1, b)$. Ndërkaq, drejtëza e klasës K_{OX}, që kalon nga pika P', pret drejtëzën njësi u në pikën $S'(ab,ab)$, kurse drejtëza e klasës K_{OY}, që kalon nga pika S', prêt drejtëzën ℓ_1: $y=xc$ në pikën me koordinata (ab, $(ab)c$), që po e shënojmë R'. Shënojmë dhe me shkronjën S pikën $B(b, b)$ (Fig. 20).

Nga figura duket se treshet (P, S, R), (P', S', R') janë treshe jokolineare pikash, drejtëzat PP', SS', RR' kalojnë nga pika O dhe $PS \parallel P'S'$, $SR \parallel S'R'$. Plotësohen kështu kushtet e D2, prandaj rezulton $PR \parallel P'R'$. Prej këndej del se edhe pikat P, Q, R, P', Q', R', O plotësojnë kushtet e D2. Prandaj $QR \parallel Q'R'$. Por QR është drejtëz e klasës K_{OX}. Rrjedhimisht $Q'R'$ është parallele me boshtin OX të abshisave, prandaj ordinatat e pikave Q' dhe R' janë të barabarta, d. m. th. $a(bc)=(ab)c$.

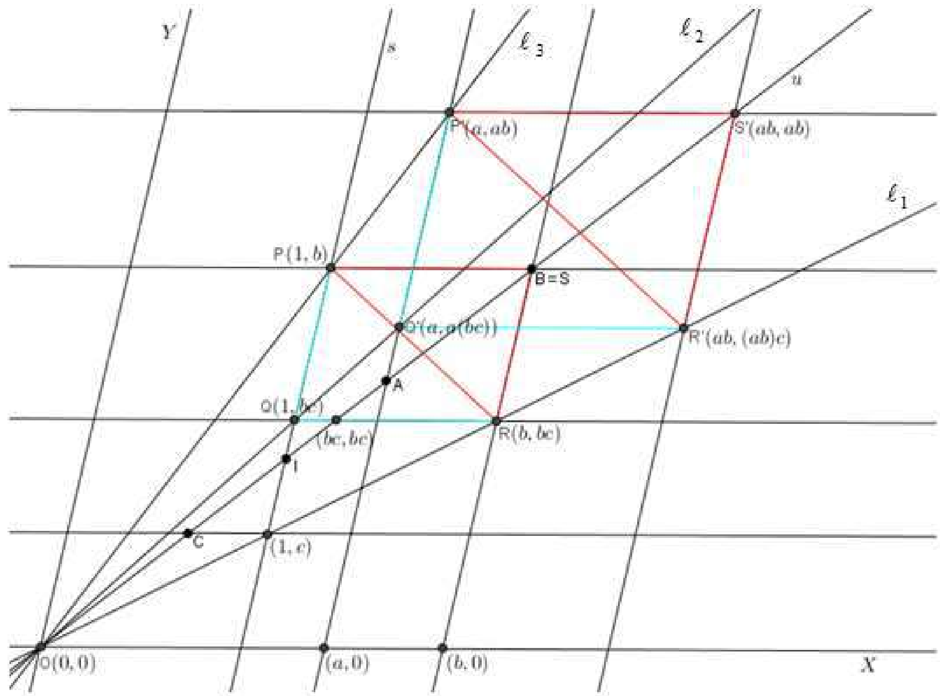

Fig. 20

Rasti 2**.** Në dy nënrastet e para $a = b \neq c$, $a = c \neq b$ arsyetohet si në rastin 1, duke iu referuar të njejtës figurë, veç për $a = b \neq c$, ku është b vihet a, kurse për $a = c \neq b$, ku është c vihet a .

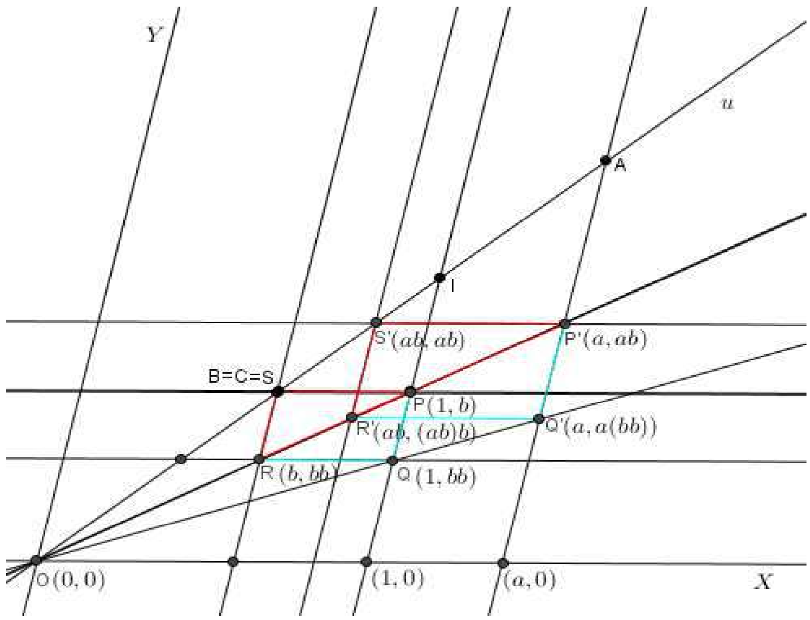

Fig. 21

Në nënrastin e tretë $a \neq b = c$ kërkohet të vërtetojmë se *a*(*bb*)=(*ab*)*b*. Duke arsyetuar si në rastin e parë, që ndërtuam Fig. 20, mbasi mbajmë parasysh se *b*=*c*, ndërtojmë Fig. 21, nga e cila, sipas D2, lidhur me treshet (*P*, *Q*, *S*) dhe (*P'*, *Q'*, *S'*), rezulton që drejtëza *QS* është paralele me drejtëzën *Q'S'*. Prandaj edhe pikat *Q*, *R*, *S*, *Q'*, *R'*, *S'*, *O* plotësojnë kushtet e *D*2 , që sjell se *QR* || *Q'R'*. Arrijmë kështu në përfundimin se ordinatat e pikave *Q'* dhe *R'* janë të barabarta, d. m. th. *a*(*bb*)=(*ab*)*b*.

Rasti 3. Të dhënat $a = b = c$ të këtij rasti na sjellin në Fig. 22. Duke mbajtur parasysh atë, sipas *D*2 për pikat *P*, *Q*, *S*, *P'*, *Q'*, *S'*, *O*, rezulton që *QR* || *Q'R'* dhe rrjedhimisht, *a*(*aa*)=(*aa*)*a*.

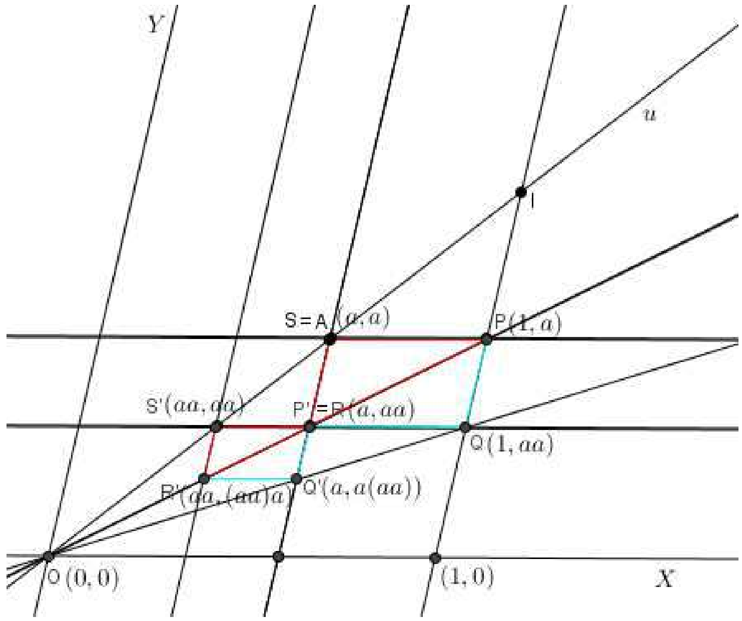

Fig. 22

Duke iu referuar Teoremës 3.5.2, që tregon se (*S*, +) është grup abeljan, Teoremës 3.6.5, që tregon se shumëzimi është shoqërues në *S*, Teoremave 3.6.3 dhe 3.6.5 që së bashku tregojnë se shumëzimi është shpërndarës lidhur me mbledhjen në *S*, përftojmë së fundi këtë

TEOREMË 3.6.7. ***Unaza ternare planare*** *(S, t)* ***e një plani afin, të koordinatizuar dhe të plotësuar me aksiomat D*1 *dhe D*2 *të Desargut, është unazë e zakonshme lidhur me mbledhjen + dhe shumëzimin · të përcaktuara në*** *S* ***si bashkësia e koordinatave të tij .***

KREU 4

MODELI I NJË GJYSMËUNAZE TERNARE NË NJË PLAN PROJEKTIV TË FUNDËM

Në këtë Kre tregojmë se bashkësia e pikave të një drejtëze të një plani projektiv të fundëm, e pajisur me një veprim aditiv binar dhe me një veprim multiplikativ ternar, formon gjysmëunazë ternare, e cila është gjysmësubtraktive dhe regulare. Duke përdorur teoremen e Desargut për vërtetimin e disa teoremave, arrijmë në përfundimin që kjo strukturë ternare është modeli i një gjysmëunaze ternare gjysmësubtraktive dhe regulare në një plan projektiv të fundëm.

4.1. Koordinatizimi i një plani projektiv të fundëm

Le të jetë Π një plan projektiv i fundëm dhe O, X, Y, I katër pika të fiksuara në të, çdo tri prej të cilave janë joincidente me një drejtëz të tij. Katërshen e radhitur (O, X, Y, I) e quajmë *sistem koordinativ* i planit Π. Lidhur me të përcaktojmë drejtëzat $\ell = OI$, $\ell_1 = OY$, $\ell_2 = OX$, $\ell_\infty = XY$ dhe pikën $J = \ell \cap \ell_\infty$ (Fig.1).

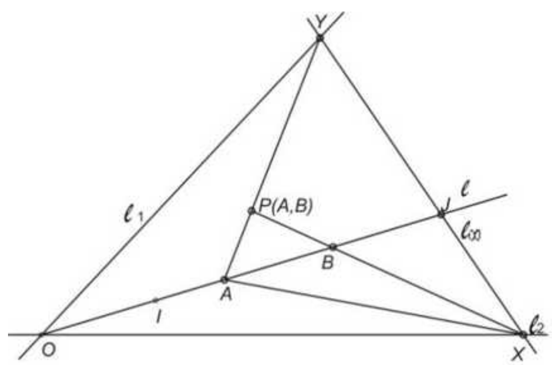

Fig.1

Shqyrtojmë bashkësinë e pikave $\mathcal{V} = \{P \in \mathcal{P} | P \, \mathrm{I} \, \ell, \; P \neq J\}$. Shënojmë me $\mathcal{P}'$ bashkësinë e pikave $P \in \mathcal{P}$ joincidente me ℓ_∞. Për çdo pikë $P \in \mathcal{P}'$ shënojmë $A = PY \cap \ell$, $B = PX \cap \ell$. Pikat A, B i quajmë koordinata të pikës P dhe këtë fakt e shënojmë $P(A, B)$. Është e qartë se për çdo pikë $L \neq J$ të ℓ kemi $L(L, L)$, në veçanti $O(O, O)$ dhe $I(I, I)$. Në këtë mënyrë është vendosur një bijeksion i $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ me bashkësinë e gjithë pikave të planit projektiv Π joincidente me ℓ_{∞}, që lejon zbulimin e disa vetive algjebrike të bashkësisë $\mathcal{V}$ të koordinatave të këtyre pikave.

4.2. Mbledhja dhe shumëzimi binar në $\mathcal{V}$ dhe disa veti të tyre

Përkufizim 4.2.1. *Le të jenë pikat e çfarëdoshme* $A, B \in \mathcal{V}$ *dhe drejtëzat* ${}_B\sigma_J = B'J$, *ku* $B' = XB \cap \ell_1$ *si dhe* ${}_A\sigma_X = A_1X$, *ku* $A_1 = YA \cap {}_B\sigma_J$. *Pasqyrimi +:* $\mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}$, *përcaktuar nga* $(A, B) \mapsto {}_A\sigma_X \cap \ell = A + B$, $\forall\ A, B \in \mathcal{V}$ *quhet mbledhje në* $\mathcal{V}$ (Fig. 1).

Sipas këtij Përkufizimi, për dy pika të çfarëdoshme $A, B \in \mathcal{V}$, mund të shkruajmë

$$\left.\begin{array}{l} {}_B\sigma_J = B'J,\ ku\ B' = XB \cap \ell_1 \\ {}_A\sigma_X = A_1X,\ ku\ A_1 = YA \cap {}_B\sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow A + B = {}_A\sigma_X \cap \ell$$

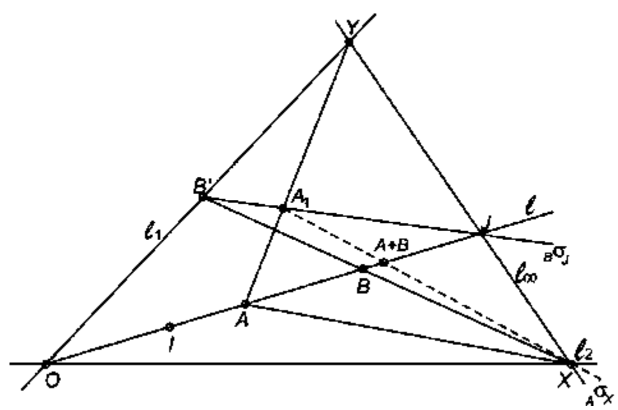

Fig.1

Nga ku menjëherë del i vërtetë pohimi

$$\forall\ A \in \mathcal{V},\quad O + A = A + O = A\,. \tag{1}$$

Vlen gjithashtu edhe ky

POHIM 4.2.1. $\forall\ A \in \mathcal{V},\ \ \exists \overline{A} \in \mathcal{A},\ \ A + \overline{A} = O\,.$ (2)

Vërtetim. Dallojmë dy raste: $A = O$ dhe $A \neq O$.

Në qoftë se $A = O$, atëherë $\overline{A} = O$, sepse, sipas (1), $O + O = O$.

Në qoftë se $A \neq O$, kërkohet pika $\overline{A}$ e tillë që

$$\left.\begin{array}{l} {}_{\overline{A}}\sigma_J = \overline{A}'J,\ ku\ \overline{A}' = X\overline{A} \cap \ell_1; \\ {}_{A}\sigma_X = A_1X,\ ku\ A_1 = YA \cap {}_{\overline{A}}\sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow {}_A\sigma_X \cap \ell = O.$$

Duke patur parasysh ndërtimin e Fig.1, ku në vend të pikës B mendohet pika $\overline{A}$, kemi $A_1 = YA \cap \overline{A}'J \in A_1X = OX$, sepse $A + \overline{A} = O \Rightarrow A_1 = YA \cap OX$. Ndërtojmë pikën A_1 (Fig.2). Më tej, $A_1 \in \overline{A}'J \Rightarrow \overline{A}' \in A_1J$, por $\overline{A}' \in \ell_1$, prej nga përcaktojmë edhe pikën $\overline{A}' = A_1J \cap \ell_1$. Ajo rezulton kështu incidente me $\overline{A}X$, prandaj $\overline{A} \in \overline{A}'X$. Duke qenë se $\overline{A} \in \ell$, përcaktojmë së fundi pikën $\overline{A} = \overline{A}'X \cap \ell \in \mathcal{V}(\overline{A} \neq J)$.

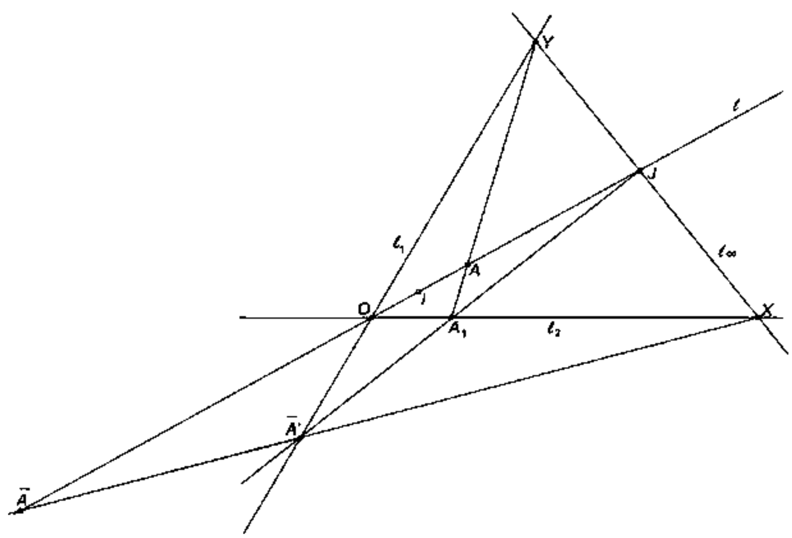

Fig.2

Përkufizim 4.2.2. *Le të jenë pikat e çfarëdoshme* $A, B \in \mathcal{V}$ *dhe drejtëzat* ${}_A p_O = A'O$ *ku* $A' = XA \cap YI$ *si dhe* B_AX, *ku* $B_A = YB \cap {}_A p_O$. *Pasqyrimi* $\otimes : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}$, *përcaktuar nga* $(A, B) \mapsto B_AX \cap \ell = A \otimes B$, $\forall\ A, B \in \mathcal{V}$ *quhet shumëzim në* $\mathcal{V}$ (Fig. 3).

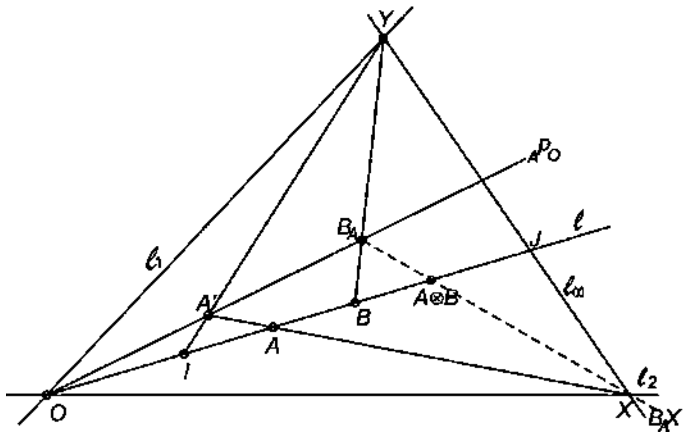

Fig.3

Në rastin e veçantë kur $A = O$ vihet re menjëherë që ${}_O p_O = OX$, që sjell $B_O = YB \cap {}_O p_O \in OX$. Prandaj, sipas Përkufizimit 4.2.2, $O \otimes B = O$. Drejtpërdrejtë tregohet se edhe $A \otimes O = O$. Në këtë mënyrë del i vërtetë ky

POHIM 4.2.2. $\forall\ A \in \mathcal{V},\ O \otimes A = A \otimes O = O$. (3)

Sipas Përkufizimit 4.2.2, për çdo dy pika $A, B \in \mathcal{V}$ mund të shkruajmë

$$\left.\begin{array}{l} {}_A p_O = A'O, \quad ku \quad A' = XA \cap YI \\ B_A X, \quad ku \quad B_A = YB \cap {}_A p_O \end{array}\right] \Rightarrow A \otimes B = B_A X \cap \ell ,$$

prej nga del menjëherë i vërtetë edhe ky

POHIM 4.2.3. $\forall\ A \in \mathcal{V},\ I \otimes A = A \otimes I = A$. (4)

Së fundi vlen gjithashtu dhe ky

POHIM 4.2.4. $\forall\ A \in \mathcal{V}, A \neq O\ , \exists A^{-1} \in \mathcal{V},\ A \otimes A^{-1} = I$. (2')

Vërtetim. Dallojmë dy raste: $A = I$ dhe $A \neq I, O$.

Në qoftë se $A = I$, atëherë, sipas (4), $A^{-1} = I$. Në qoftë se $A \neq I, O$, kërkohet pika A^{-1} e tillë që

$$\left.\begin{array}{l} {}_A p_O = A'O,\ ku\ A' = XA \cap YI; \\ A^{-1}{}_A X,\ ku\ A^{-1}{}_A = YA^{-1} \cap_A p_O \end{array}\right] \Rightarrow A \otimes A^{-1} = A^{-1}{}_A X \cap \ell$$

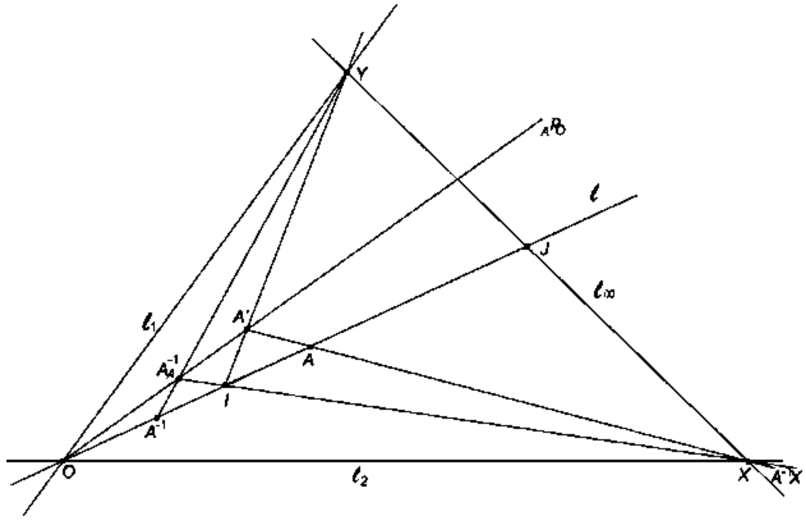

Fig. 4

Fillimisht ndërtojmë pikën $A' = XA \cap YI$ (Fig. 4). Duke patur parasysh ndërtimin e Fig.3, ku në vend të pikës B mendohet pika A^{-1}, kemi $A_A^{-1} = YA^{-1} \cap A'O \in A'O.$ Por, $A \otimes A^{-1} = A_A^{-1} X \cap \ell = I \Rightarrow I \in A_A^{-1} X \Rightarrow A_A^{-1} \in IX$. Për rrjedhojë $A_A^{-1} = A'O \cap IX$, që lejon ndërtimin e pikës A_A^{-1} në Fig. 4 dhe, së fundi, pikën $A^{-1} = A_A^{-1} Y \cap \ell \in \mathcal{V}$ ($A^{-1} \neq J$).

TEOREMË 4.2.1 ***Grupoidi*** $(\mathcal{V}, +)$ ***është gjysmëgrup komutativ***.

Vërtetim. Së pari, mbledhja është komutative në $\mathcal{V}$:

$$\forall\ A, B \in \mathcal{V},\ \ A + B = B + A. \tag{5}$$

Në rastin kur $A = B$ pohimi është evident, kurse kur $A = O$ ose $B = O$, pohimi vlen sipas (1). Ndalemi në rastin kur $A, B \neq O$ dhe $A \neq B$. Në këtë rast, sipas Përkufizimit 4.2.1, kemi

$$\left.\begin{array}{l} {}_B\sigma_J = B'J,\ ku\ B' = XB \cap \ell_1; \\ {}_A\sigma_X = A_1 X, ku\ A_1 = YA \cap_B \sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow A + B = {}_A\sigma_X \cap \ell$$

dhe

$$\left.\begin{array}{l} {}_A\sigma_J = A'J,\ ku\ A' = XA \cap \ell_1; \\ {}_B\sigma_X = B_1 X, ku\ B_1 = YB \cap_A \sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow B + A = {}_B\sigma_X \cap \ell.$$

Shënojmë $A+B=Q$ dhe $B+A=T$ (Fig.5). Është e qartë se $A+B=B+A$ do të thotë se pikat Q dhe T përputhen ose, e njejta gjë, që pikat A_1, B_1, X janë kolineare. Për këtë përdorim Teoremën 2.3.1 të Desargut. Shqyrtojmë trekulmëshat A', B', J dhe A, B, Y. Ata janë perspektivë nga pika X, mbasi drejtëzat $A'A$, $B'B$ dhe JY janë incidente me X. Kjo sjell, sipas Teoremës së Desargut, që pikat $A'B' \cap AB = O$, $A'J \cap AY = A_2$ dhe $B'J \cap BY = B_2$ janë kolineare.

Shqyrtojmë tani trekulmëshat B, B', B_2 dhe J, Y, A_2. Meqenëse drejtëzat BJ, $B'Y$ dhe A_2B_2 janë incidente me pikën O, ata janë perspektivë nga O. Prandaj, pikat $BB' \cap JY = X$, $BB_2 \cap JA_2 = B_1$ dhe $B'B_2 \cap YA_2 = A_1$ janë kolineare.

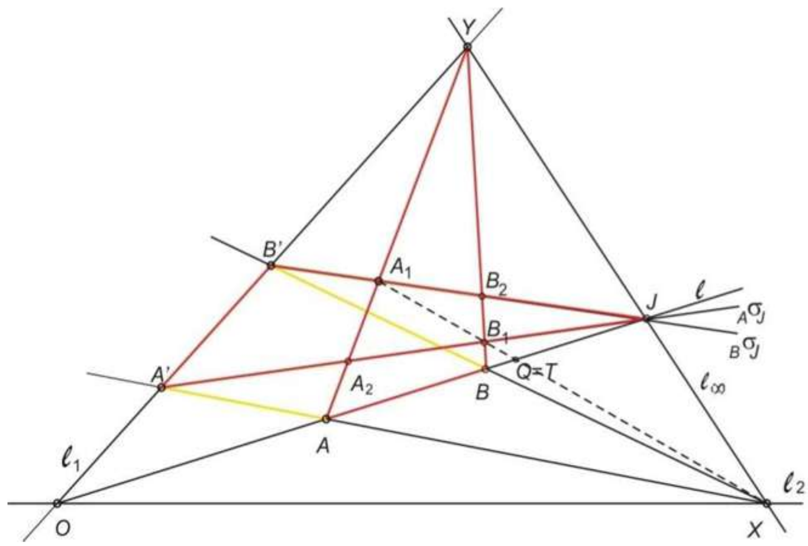

Fig. 5

Mbledhja është edhe associative në $\mathcal{V}$:

$$\forall\ A, B, C \in \mathcal{V}, (A+B)+C = A+(B+C) \tag{6}$$

Në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, C është O pohimi vlen sipas (1), kurse kur $A = C$, pohimi vlen sipas (5). Ndalemi në rastin kur $A, B, C \neq O$ dhe $A \neq C$, (edhe $A \neq B$, sepse, kur $A = B$, është rast evident). Në këtë rast, sipas Përkufizimit 4.2.1, për pikat A, B (Fig.6) kemi

$$\left.\begin{array}{l} {}_B\sigma_J = B'J,\ ku\ B' = XB \cap \ell_1; \\ {}_A\sigma_X = A_1X, ku\ A_1 = YA \cap {}_B\sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow A+B = {}_A\sigma_X \cap \ell$$

Duke shënuar $A+B=Q$ (Fig.6), po sipas Përkufizimit 4.2.1, shkruajmë

$$\left.\begin{array}{l} {}_C\sigma_J = C'J,\ ku\ C' = XC\cap \ell_1; \\ {}_Q\sigma_X = Q_1X,\ ku\ Q_1 = YQ\cap {}_C\sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow Q+C=(A+B)+C={}_Q\sigma_X\cap\ell .$$

Sipas Përkufizimit 4.2.1, gjithashtu për pikat B, C (Fig.6) kemi

$$\left.\begin{array}{l} {}_C\sigma_J = C'J,\ ku\ C' = XC\cap \ell_1; \\ {}_B\sigma_X = B_1X,\ ku\ B_1 = YA\cap {}_C\sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow B+C={}_B\sigma_X\cap\ell$$

.

Më tej, duke shënuar $B+C=V$, edhe për pikat A, V (Fig.6) shkruajmë

$$\left.\begin{array}{l} {}_V\sigma_J = V'J,\ ku\ V' = XV\cap \ell_1; \\ {}_A\sigma_X = A_2X,\ ku\ A_2 = YA\cap_V \sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow A+V=A+(B+C)={}_A\sigma_X\cap\ell .$$

Shënojmë $(A+B)+C=T$ dhe $A+(B+C)=Z$. Në këto kushte, $(A+B)+C=A+(B+C)$ do të thotë se pikat T dhe Z përputhen ose, e njejta gjë, që pikat A_2, Q_1, X (Fig.6) janë kolineare.

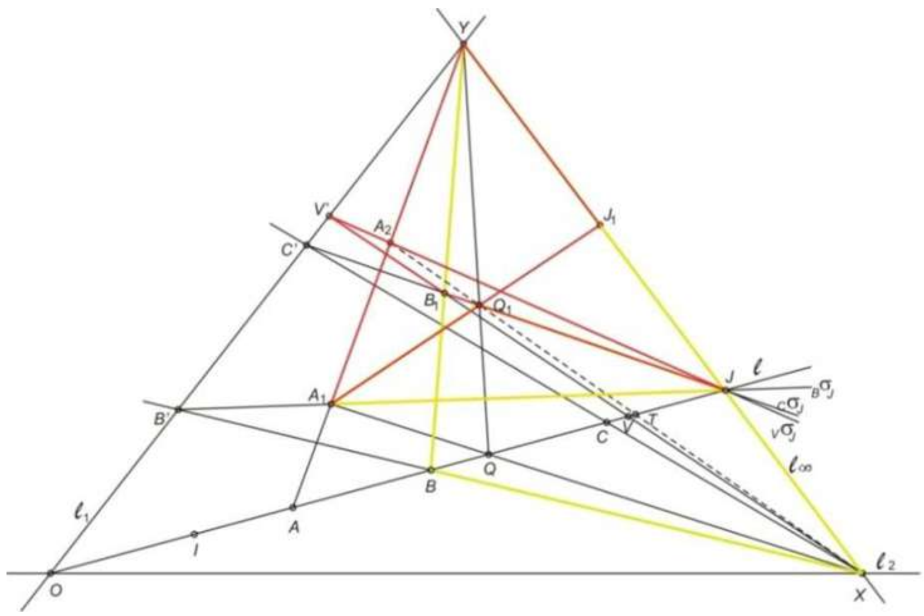

Fig.6

Nga figura vihet re perspektiviteti i trekulmëshave Y, B, X dhe Q_1, J, A_1 nga pika Q. Prandaj, pikat $YB\cap Q_1J=B_1$, $BX\cap JA_1=B'$ dhe $YX\cap Q_1A_1=J_1$ janë kolineare. Po ashtu trekulmëshat V', J, B_1 dhe Y, A_1, J_1 janë perspektivë nga pika B', mbasi $B'\in V'Y, B'\in JA_1$

dhe $B' \in B_1 J_1$. Kjo sjell, që pikat $V'J \cap YA_1 = A_2, V'B_1 \cap YJ_1 = X$ dhe $JB_1 \cap A_1 J_1 = Q_1$ janë kolineare.

Pohimet (5) dhe (6) tregojnë që ($\mathcal{V}$, +) është gjysmëgrup komutativ.

TEOREMË 4.2.2. ***Grupoidi*** $(\mathcal{V}, \otimes)$ ***është gjysmëgrup***.

Vërtetim. Shumëzimi në $\mathcal{V}$ është associativ:

$$\forall\ A, B, C \in \mathcal{V},\ (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C). \tag{10}$$

Në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, C është O pohimi vlen sipas (3), kurse të paktën njera nga pikat A, B, C është I pohimi vlen sipas (4). Ndalemi në rastin kur $A, B, C \neq O$ dhe $A, B, C \neq I$, (dhe të tri pikat janë të ndryshme, sepse, kur të paktën dy prej tyre janë të njejta, është rast evident). Në këtë rast, sipas Përkufizimit 4.2.2, për çdo dy pika $A, B \in \mathcal{V}$ (Fig.7) kemi

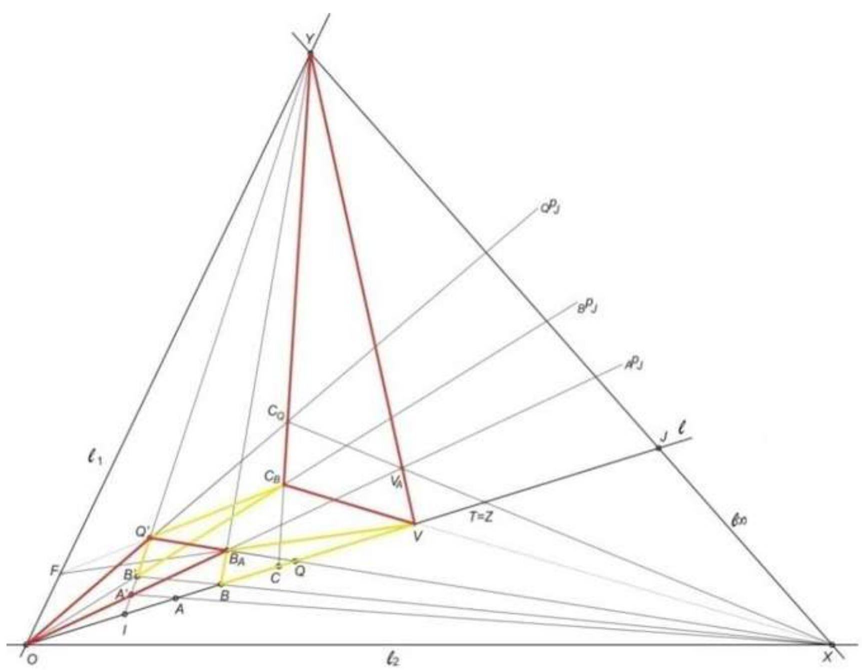

Fig.7

$$\left.\begin{array}{l} {}_A p_O = A'O,\ ku\ A' = XA \cap YI; \\ B_A X,\ ku\ B_A = YB \cap {}_A\, p_O \end{array}\right] \Rightarrow A \otimes B = B_A X \cap \ell.$$

Shënojmë $A \otimes B = Q$. Sipas Përkufizimit 4.2.2, edhe për pikat Q, C të $\mathcal{V}$ (Fig.7) kemi

$$\left.\begin{array}{l} {}_Q p_O = Q'O,\ ku\ Q' = XQ \cap YI \\ C_Q X,\ ku\ C_Q = YC \cap {}_Q\, p_O \end{array}\right] \Rightarrow Q \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = C_Q X \cap \ell\,.$$

Shënojmë $B \otimes C = V$. Sipas Përkufizimit 4.2.2, gjithashtu për pikat B, C dhe pikat A, V të $\mathcal{V}$ (Fig.7) kemi

$$\left.\begin{array}{l} {}_B p_O = B'O,\ ku\ B' = XB \cap YI; \\ C_B X,\ ku\ C_B = YC \cap {}_B p_O \end{array}\right] \Rightarrow B \otimes C = C_B X \cap \ell\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_A p_O = A'O,\ ku\ A' = XA \cap YI; \\ V_A X,\ ku\ V_A = YV \cap {}_A p_O \end{array}\right] \Rightarrow A \otimes V = A \otimes (B \otimes C) = V_A X \cap \ell\,.$$

Shënojmë $(A \otimes B) \otimes C = T$ dhe $A \otimes (B \otimes C) = Z$. Atëherë $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ do të thotë se pikat T dhe Z përputhen ose, e njejta gjë, që pikat C_Q, V_A, X (Fig.7) janë kolineare.

Vihet re (Fig.7) se trekulmëshat B', Q', C_B dhe B, B_A, V janë perspektivë nga pika X. Shënojmë $Q'C_B \cap B_A V = F$. Zbatimi i Teoremës së Desargut në këtë rast sjell kolinearitetin e pikave Y, F, O. Duke e zbatuar, më tej, këtë teoremë ndaj trekulmëshave O, Q', B_A dhe Y, C_B, V, që janë perspektivë nga pika F, rezulton kolineariteti i pikave C_Q, V_A, X.

TEOREMË 4.2.3. ***Në $\mathcal{V}$ shumëzimi $\otimes$ është shpërndarës lidhur me mbledhjen $+$, d. m. th.***

$$\forall\ A, B, C \in \mathcal{V};\ (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C\,; \tag{8}$$

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

Vërtetim. Në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, C është O pohimi vlen sipas (1), (3), kurse, kur $A, B \neq O$ dhe $C = I$, pohimi vlen sipas (4). Shqyrtojmë rastin $A, B \neq O$ dhe $C \neq O, I$. Ndërtojmë, sipas Përkufizimit 4.2.1, pikën $A + B = Q$ (Fig.8):

$$\left.\begin{array}{l} {}_B \sigma_J = B''J,\ ku\ B'' = XB \cap \ell_1; \\ {}_A \sigma_X = A_1 X,\ ku\ A_1 = YA \cap {}_B \sigma_J \end{array}\right] \Rightarrow A + B = Q = {}_A \sigma_X \cap \ell\,.$$

Ndërtojmë tani, sipas Përkufizimit 4.2.2, pikat $Q \otimes C = Z$, $A \otimes C = T$ dhe $B \otimes C = V$ (Fig.8):

$$\left.\begin{array}{l} {}_{Q}p_{O} = Q'O,\ ku\ Q' = XQ \cap YI; \\ C_{Q}X,\ ku\ C_{Q} = YC \cap {}_{Q}p_{O} \end{array}\right] \Rightarrow Q \otimes C = Z = C_{Q}X \cap \ell\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{A}p_{O} = A'O,\ ku\ A' = XA \cap YI; \\ C_{A}X,\ ku\ C_{A} = YC \cap {}_{A}p_{O} \end{array}\right] \Rightarrow A \otimes C = T = C_{A}X \cap \ell\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{B}p_{O} = B'O,\ ku\ B' = XB \cap YI; \\ C_{B}X,\ ku\ C_{B} = YC \cap {}_{B}p_{O} \end{array}\right] \Rightarrow B \otimes C = V = C_{B}X \cap \ell\,.$$

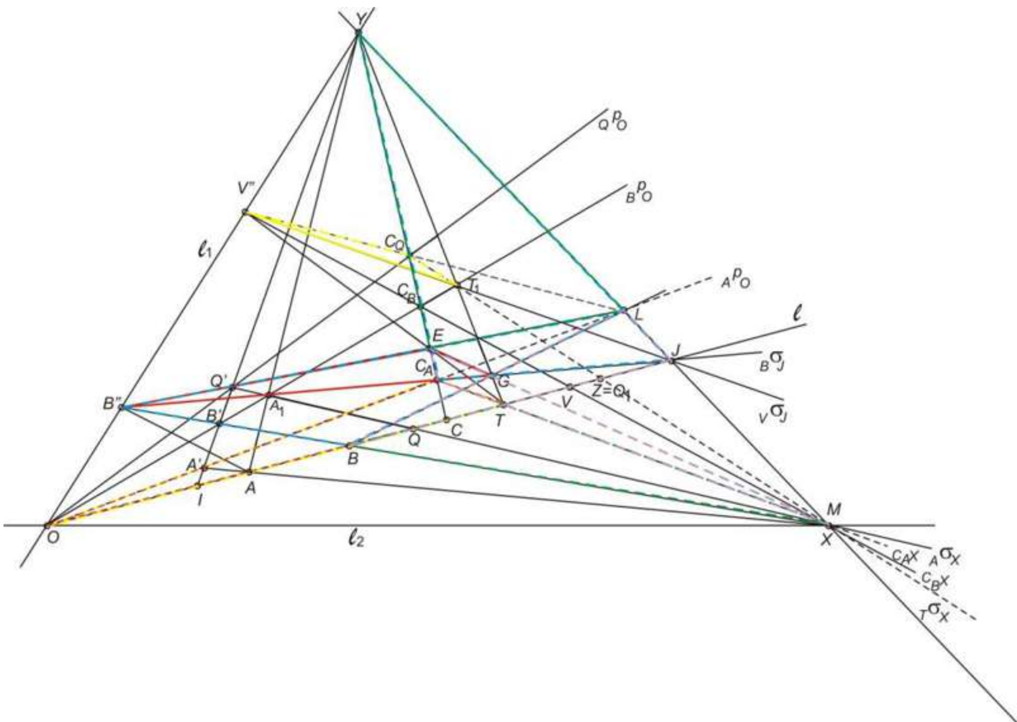

Fig.8

Së fundi ndërtojmë, sipas Përkufizimit 4.2.1, pikën $T + V = Q_1 = A \otimes C + B \otimes C$ (Fig.8):

$$\left.\begin{array}{l} {}_{V}\sigma_{J} = V''J,\ ku\ V'' = XV \cap \ell_1; \\ {}_{T}\sigma_{X} = T_1X,\ ku\ T_1 = YT \cap {}_{V}\sigma_{J} \end{array}\right] \Rightarrow T + V = Q_1 = {}_{T}\sigma_{X} \cap \ell\,.$$

Atëherë $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$ do të thotë se pikat Z dhe Q_1 përputhen ose , e njejta gjë, që pikat C_Q, T_1, X (Fig.8) janë kolineare.

Marrim në drejtëzën $C_Q T_1$ pikën M si pikë të prerjes se saj me drejtëzën $C_A T$, pra $C_Q T_1 \cap C_A T = M$. Të tregojmë që $M = X$. Për këtë mjafton të tregojmë se ato janë incidente me dy drejtëza që priten.

Vihet re menjëherë se të dy pikat M, X janë incidente me drejtëzën $C_A T$.

Më tej, shënojmë $V''' C_Q \cap OC_A = L$ (Fig. 8). Tregojmë tani se ato janë incidente edhe me drejtëzën LJ.

Perspektiviteti i trekulmëshave C_Q, V''', T_1 dhe C_A, O, T nga pika Y, sipas Teoremës së Desargut, sjell kolinearitetin e pikave $C_Q V''' \cap C_A O = L$, $V''' T_1 \cap OT = J$, $C_Q T_1 \cap C_A T = M$, ndryshe $M \in LJ$.

Shënojmë gjithashtu $B'' L \cap YC = E$, $C_A J \cap BL = G$. Zbatojmë radhazi Teoremën e Desargut si më poshtë: 1. Perspektiviteti i trekulmëshave Y, J, C_A dhe B'', B, L nga pika O sjell kolinearitetin e pikave X, G, E; 2. Perspektiviteti i trekulmëshave E, L, Y dhe X, B, T nga pika G sjell kolinearitetin e pikave B'', J, C_A; 3. Perspektiviteti i trekulmëshave E, X, C_A dhe L, B, J nga pika B'' sjell kolinearitetin e pikave G, T, Y; 4. Perspektiviteti i trekulmëshave E, B'', G dhe C_A, O, T nga pika Y sjell kolinearitetin e pikave L, J, X. Kjo e fundit tregon se $X \in LJ$.

Në mënyrë analoge tregohet se vlen dhe $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.

4.3. Një model i një gjysmëunaze ternare në një plan projektiv të fundëm dhe disa veti të tij

Përkufizim 4.3.1. *Le të jenë pikat e çfarëdoshme* $A, B, C \in \mathcal{V}$. *Shumëzim ternar në* $\mathcal{V}$ *quhet pasqyrimi* $\cdot : \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}$, *përcaktuar nga*

$$ABC = (A \otimes B) \otimes C \qquad (9)$$

Duke e pajisur bashkësinë $\mathcal{V}$ të koordinatave të pikave nga $\mathcal{P}'$ me këtë shumëzim ternar dhe, duke patur parasysh Pohimin 1.1.2, sipas Përkufizimit 1.3.1, përftojmë këtë

RRJEDHIM 4.3.1. $(\mathcal{V}, \cdot)$ ***është gjysmëgrup ternar***.

Nga pajisja e bashkësisë $\mathcal{V}$ të koordinatave të pikave nga $\mathcal{P}$ ', krahas me veprimin + të mbledhjes edhe me këtë shumëzim ternar, kemi ndërtuar ***modelin e një stukture ternare*** ($\mathcal{V}$, +, $\cdot$). Vërtetojmë më poshtë që ai është modeli i një gjysmëunaze ternare në planin projektiv të fundëm $\mathcal{P}$ dhe studiojmë disa veti algjebrike të tij.

TEOREMË 4.3.1. ***Struktura ternare*** ($\mathcal{V}$, +, $\cdot$) ***është gjysmëunazë ternare***.

Vërtetim. Vihet re menjëherë, nga Teorema 4.2.1 dhe Rrjedhimi 4.3.1, që plotësohen pikat 1 dhe 2 të Përkufizimit 1.4.1 të gjysmëunazës ternare. Mbetet vërtetimi i vetisë 3 të tij:

$$\forall\, A,B,C,D \in \mathcal{V},\quad \begin{aligned} (A+B)CD &= ACD+BCD,\\ A(B+C)D &= ABD+ACD,\\ AB(C+D) &= ABC+ABD. \end{aligned} \tag{10}$$

Për barazimin e parë, sipas (8) dhe (9), kemi

$$(A+B)CD = \big((A+B)\otimes C\big)\otimes D = \big((A\otimes C + B\otimes C\big)\otimes D) =$$

$$=(A\otimes C)\otimes D + (B\otimes C)\otimes D \;= ACD + BCD\,.$$

Në mënyrë analoge tregohet dhe vërtetësia e dy barazimeve të tjera (10).

TEOREMË 4.3.2. ($\mathcal{V}$, +, $\cdot$) ***është gjysmëunazë ternare me zero.***

Vërtetim. Nga (1) kemi $\forall\ A\in \mathcal{V},\ O+A = A+O = A$, d. m. th. pika $O\in\mathcal{V}$ është element zero lidhur me mbledhjen +. Veç kësaj, sipas (3), nga (9) del menjëherë i vërtetë pohimi

$$\forall\ A,B\in\ \mathcal{V},\ OAB = AOB = ABO = O\ , \tag{11}$$

që, sipas Përkufizimit 1.4.3, teorema qendron.

TEOREMË 4.3.3. ***Gjysmëunaza ternare*** ($\mathcal{V}$, +, $\cdot$) ***është gjysmësubtraktive dhe regulare.***

Vërtetim. Le të jenë A,B dy pika të çfarëdoshme të $\mathcal{V}$. Sipas (2), ekziston $\overline{A}\in\ \mathcal{V}$ e tillë që $A+\ \overline{A}\ = O$. Shënojmë $X' = B+\ \overline{A}$. Atëherë, sipas (1), (5) dhe (6), kemi

$$A+X' = A+(B+\overline{A}) = A+(\overline{A}+B) = (A+\overline{A})+B = O+B = B\,.$$

Vlen kështu pohimi

$$\forall\ A, B \in \mathcal{V},\ \exists X' \in \mathcal{A},\ \ A + X' = B,$$

që, sipas Përkufizimit 1.4.6, tregon se gjysmëunaza ternare $(\mathcal{V},\ +,\ \cdot)$ është gjysmësubtraktive.

Më tej, në qoftë se $A = O$, për çdo $X' \in \mathcal{V}$, sipas (11) dhe (3), kemi $OX'O = O \otimes (X' \otimes O) = O$; në qoftë se $A \neq O$, sipas (2'), $\exists\ A^{-1} \in \mathcal{V}$ e tillë që $A \otimes A^{-1} = I$ që, duke patur parasysh edhe (4), sjell $A\ A^{-1}\ A = (A \otimes A^{-1}) \otimes A = I \otimes A = A$.

Vlen kështu pohimi

$$\forall\ A \in \mathcal{V},\ \exists\ X' \in \mathcal{V},\ \ AX'A = A,$$

Që, sipas Përkufizimit 1.4.4, tregon se gjysmëunaza ternare $(\mathcal{V},\ +,\ \cdot)$ është regulare.

KREU 5

HEAPET DHE MODELI I NJË HEAPI KOMUTATIV ANËSOR NË NJË PLAN TË DESARGUT

Në këtë Kre kemi studiuar disa veti të rendësishme algjebrike të heaps strukturave, Ward grupoideve dhe grupoideve subtraktive dhe vërtetojmë që në të njëjtën bashkësi ekzistenca e heapi komutativ anësor, ekzistenca e paralelogram-hapësirës, sistemit të plotësuar të Desargut si dhe ekzistenca e grupoidit subtraktiv në të njejtën bashkësi janë ekuivalente me njëra tjetrën. Përkatësisht studiohen disa veti të heap-eve si struktura algjebrike me një veprim ternar të ndërthurura me lloje grupoidesh, duke futur kuptimet e veprimit ternar nga shumëzimi, të heap-it nga shumëzimi dhe te ternargrupoidit. Shikuar nga ky këndvështrim kemi ndërtuar modelin e një heapi komutativ anësor në një plan afin të Desargut.

5.1. Heapet komutative anësore dhe gupoidet subtraktive të të njejtës bashkësi

Në terminologjinë e V.V.Vagnerit [16] formulojmë përkufizimet e mëposhtme.

Përkufizim 5.1.1. *Le të jetë* $[\ ]: B^3 \to B$ *veprim ternar në bashkësinë joboshe B. (B, [ ]) quhet heap në qoftë se* $\forall a, b, c, d, e \in B$,

$$[[abc]de] = [ab[cde]] \tag{1}$$

$$[abb] = [bba] = a \tag{2}$$

Përkufizim 5.1.2. *Le të jetë* $B^2 \to B$ *veprim binar në bashkësinë B, që e shënojmë · dhe e quajmë shumëzim në B. Grupoidi (B, ·) quhet grupoid transitiv i djathtë (shkurt Ward grupoid) në qoftë se* $\forall a, b, c \in B$,

$$ac \cdot bc = ab\,. \tag{3}$$

Përkufizim 5.1.3. *Ward grupoidi (B, ·) quhet i zgjidhshëm djathtas në qoftë se* $\forall a, b \in B$ *ka zgjidhje ekuacioni* $ax = b$.

LEMMË 5.1.1. [17] ***Në qoftë se* (*B*, ·) *është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas*, atëherë** $\exists! u \in B$ ***i tillë që*** $\forall a \in B$ **,**

$$a \cdot a = u \tag{4}$$

$$a \cdot u = a \tag{5}$$

Vërtetim. Le të jenë b një element i fiksuar i B dhe $u = b \cdot b$. Për çdo $a \in B$, $\exists c \in B$ e tillë që $b \cdot c = a$. Atëherë nga (3), fitojmë (4):

$$aa = bc \cdot bc = bb = u\ ,$$

dhe, nga (4) e (3) marrim (5):

$$au = bc \cdot cc = bc = a.$$

Për të treguar se elementi u është i vetëm, supozojmë se edhe o nga *B*

është i tillë që $\forall a \in B$,

$$a \cdot a = o\ ,$$

$$a \cdot o = a\ .$$

Për $a = o$, nga barazimi i fundit, marrim $o \cdot o = o$, kurse nga (4), marrim $o \cdot o = u$. Pra, $o = u$.

Vemë re, nga barazimi (5), se elementi u është njësh i djathtë në (*B*, ·). Veç kësaj , nga (3) dhe (4), kemi $ab = aa \cdot ba = u \cdot ba$. Kemi përftuar kështu këtë

RRJEDHIM . ***Në një ward grupoid të zgjidhshëm djathtas*** (*B*, ·)

1. ***ka vetëm një njësh të djathtë dhe i tillë është elementi*** $u = b \cdot b$ ***, ku*** b ***është një element i çfarëdoshëm i*** *B;*

2. ***vlen pohimi***

$$ab = u \cdot ba,\ \forall a, b \in B. \tag{5'}$$

Përkufizim 5.1.4. *Le të jetë (B, ·) një grupoid multiplikativ dhe* o *një element i fiksuar në bashkësinë B. Veprimin ternar* [ ] në *B*, të *përcaktuar nga*

$$[abc] = ab \cdot oc\ ,\quad \forall a, b, c \in B \tag{6}$$

e quajmë veprim ternar nga shumëzimi sipas elementit o, *kurse heapin* (*B*, [ ]), *në të cilin veprimi ternar* [ ] *përcaktohet nga* (6), e *quajmë heap nga shumëzimi sipas elementit* o.

POHIM 5.1.1. ***Në qoftë se*** $(B,\ \cdot)$ ***është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas dhe*** u ***është njëshi i djathtë i tij, atëherë struktura*** $(B,[\ ])$***, në të cilën*** $[\ ]$ ***është veprim ternar nga shumëzimi sipas*** u***, është heap.***

Vërtetim. Në qoftë se $(B,\ \cdot)$ është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas, nga Rrjedhimi, ai ka njësh të djathtë elementin $u = b\cdot b$, ku b është një element i çfarëdoshëm i B. Meqenëse veprimi [ ] është veprim ternar nga shumëzimi sipas u, nga Përkufizimi 5.1.4 kemi

$$[abc] = ab\cdot uc\ ,\ \ \forall a,b,c\in B \tag{6'}$$

Në këto kushte, së pari vlen (1), sepse për çdo $a,b,c,d,e\in B$ kemi:

$$
\begin{aligned}
[[abc]de] &\overset{(6')}{=} (ab\cdot uc)d\cdot ue \overset{(5)}{=} \\
&\overset{(5)}{=} (ab\cdot uc)(du)\cdot(ue\cdot u) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} (ab\cdot uc)(dc\cdot uc)\cdot(ue\cdot u) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} \left(ab\cdot dc\right)\cdot\left(ue\cdot u\right) \overset{(4)}{=} \\
&\overset{(4)}{=} \left(ab\cdot dc\right)\cdot\left(ue\cdot dd\right) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} \left(ab\cdot dc\right)\cdot\left((ue\cdot cd)\cdot(dd\cdot cd)\right) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} \left(ab\cdot dc\right)\cdot\left((ue\cdot cd)\cdot dc\right) \overset{(3)}{=} \overset{(3)}{=} ab\cdot(ue\cdot cd) \overset{(5)}{=} \\
&\overset{(5)}{=} ab\cdot\left(ue\cdot(cd\cdot u)\right) \overset{(4)}{=} \\
&\overset{(4)}{=} ab\cdot\left(ue\cdot(cd\cdot ee)\right) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} ab\cdot\left(ue\cdot\left((cd\cdot ue)\cdot(ee\cdot ue)\right)\right) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} ab\cdot\left(ue\cdot\left((cd\cdot ue)\cdot(eu)\right)\right) \overset{(5)}{=} \\
&\overset{(5)}{=} ab\cdot(ue\cdot(cd\cdot ue)e) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} ab\cdot u(cd\cdot ue) \overset{(6')}{=} \\
&\overset{(6')}{=} [ab[cde]]
\end{aligned}
$$

Gjithashtu vlen (2), sepse për çdo $a,b\in B$ kemi:

$$[abb] \overset{(6')}{=} ab\cdot ub \overset{(3)}{=} au \overset{(5)}{=} a\ ,$$

$$[bba] \overset{(6')}{=} bb \cdot ua \overset{(4)}{=} aa \cdot ua \overset{(3)}{=} au \overset{(5)}{=} a \,.$$

Rezulton në këtë mënyrë se struktura (B, [ ]) është heap nga shumëzimi sipas u.

Në terminologjinë e M. Polonijo [18] formulojmë tani këtë

Përkufizim 5.1.5. *Ward grupoidi* (B, $\cdot$) *quhet grupoid subtraktiv, në qoftë se* $\forall a, b \in B$,

$$a \cdot ab = b \tag{7}$$

Sipas këtij përkufizimi, duket me një herë që $x = ab$ është zgjidhje e ekuacionit $ax = b$. Për rrjedhojë vlen ky

POHIM 5.1.2. ***Në qoftë se grupoidi*** (B, $\cdot$) ***është subtraktiv, atëherë ai është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas.***

Është i vërtetë gjithashtu edhe ky

POHIM 5.1.3. ***Në qoftë se struktura*** (B, [ ]) ***është heap nga shumëzimi sipas njëshit të djathtë*** u ***të grupoidit*** (B, $\cdot$)***, i cili është subtraktiv, atëherë vlen barazimi***

$$[abc] = a \cdot bc \,, \ \forall a, b, c \in B \tag{8}$$

Vërtetim. Sipas kushtit, struktura (B, [ ]) është heap nga shumëzimi sipas njëshit të djathtë u të grupoidit (B, $\cdot$), prandaj veprimi ternar [ ] përcaktohet nga (6'). Duke patur parasysh edhe faktin se (B, $\cdot$) është grupoid subtraktiv, përftojmë

$$\begin{aligned}[abc] &\overset{(6')}{=} ab \cdot uc \overset{(7)}{=} ab \cdot \big(bc \cdot (bc \cdot uc)\big) \overset{(3)}{=} \\ &\overset{(3)}{=} ab(bc \cdot bu) \overset{(5)}{=} \\ &\overset{(5)}{=} ab \cdot (bc \cdot b) \overset{(3)}{=} a \cdot bc\end{aligned}$$

Përkufizim 5.1.6. *Le të jetë* (B, [ ]) *strukturë ternare dhe* o *një element i fiksuar në bashkësinë B. Grupoidi* (B, $\cdot$) *quhet ternargrupoid i saj sipas* o, *në qoftë se* $\forall a, b \in B$,

$$a \cdot b = [abo] \tag{9}$$

POHIM 5.1.4. ***Në qoftë se struktura (B, [ ]) është heap, atëherë ternargrupoidi i tij*** (B, $\cdot$) ***sipas*** o ***është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas me njësh të djathtë elementin e dhënë*** $o \in B$**.**

Vërtetim. Sipas kushtit, grupoidi (*B*, $\cdot$) është ternargrupoidi përkatës i heapit (*B*, [ ]), prandaj, sipas Përkufizimit 5.1.6, vlen (9), ku o është një element i dhënë në *B*.

Grupoidi (*B*, $\cdot$) është ward grupoid, sepse vlen (3) për çdo $a,b,c \in B$:

$$
\begin{aligned}
ac \cdot bc &\overset{(9)}{=} [[aco] \cdot [bco]o] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[aco][bco][bbo]] \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} [[[aco][bco]b]bo] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[[aco][bco][bcc]]bo] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[[aco][bco][bc[ooc]]]bo] \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} [[[aco][bco][[bco]oc]]bo] \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} [[[aco][bco][bco]]oc]bo] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[[aco]oc]bo] \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} [[ac[ooc]]bo] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[acc]bo] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [abo] = ab.
\end{aligned}
$$

Për më tepër, $x = [oba] \in B$ është zgjidhje e ekuacionit $a \cdot x = b$, d.m.th. $\forall a,b \in B$ vlen barazimi

$$a \cdot [oba] = b \tag{10}$$

Me të vërtetë, $a \cdot x = a \cdot [oba] \overset{(9)}{=}$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(9)}{=} [a[oba]o] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[bba][oba]o] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [[[boo]ba][oba]o] \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} [[bo[oba]][oba]o] \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} [bo[[oba][oba]o] \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} [boo] \overset{(2)}{=} b.
\end{aligned}
$$

Për rrjedhojë, sipas Përkufizimit 5.1.3, (*B*, $\cdot$) është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas. Gjithashtu, kemi

$$ao \overset{(9)}{=} [aoo] \overset{(2)}{=} a,$$

që tregon se o është njëshi i djathtë.

Përkufizim 5.1.7. [19] *Heapi* (B, [ ]) *quhet heap komutativ anësor, në qoftë se* $\forall a,b,c \in B$,

$$[abc] = [cba] \tag{11}$$

Lidhur me këtë kuptim kanë vend teoremat e mëposhtëme.

POHIM 5.1.5. ***Në qoftë se grupoidi*** (B, $\cdot$) ***është subtraktiv, atëherë struktura*** (B, [ ])***, në të cilën veprimi ternar*** [ ] ***përcaktohet nga*** (8)***, është heap komutativ anësor.***

Vërtetim. Për grupoidin subtraktiv (B, $\cdot$) vlejnë barazimet (3) dhe (7), kurse për veprimin ternar [ ] vlen barazimi (8). Prandaj për çdo a,b,c,d,e nga B kemi

$$\begin{aligned}
(i).\ [[abc]de] &\overset{(8)}{=} [abc]\cdot de \overset{(8)}{=} \\
&\overset{(8)}{=} (a\cdot bc)(de) \overset{(7)}{=} \\
&\overset{(7)}{=} (a\cdot bc)(c\cdot c(de)) \overset{(7)}{=} \\
&\overset{(7)}{=} \left(a\cdot bc\right)\left((b\cdot c(de))\cdot(b\cdot c(de))(c\cdot c(de)\right) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} \left(a\cdot bc\right)\left((b\cdot c(de))\cdot bc\right) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} a(b\cdot c(de)) \overset{(8)}{=} \\
&\overset{(8)}{=} a\cdot\left(b\cdot[cde]\right) \overset{(8)}{=} \\
&\overset{(8)}{=} [ab[cde]];
\end{aligned}$$

$$(ii).\ [bba] \overset{(8)}{=} b\cdot ba \overset{(7)}{=} a;$$

$$\begin{aligned}
(iii).[abc] &\overset{(8)}{=} a\cdot bc \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} a\cdot(b\cdot ba)(c\cdot ba) \overset{(7)}{=} \\
&\overset{(7)}{=} a\cdot a(c\cdot ba) \overset{(7)}{=} \\
&\overset{(7)}{=} c\cdot ba \overset{(8)}{=} [cba].
\end{aligned}$$

Nga (ii) dhe (iii), në veçanti, marrim $[abb]=[bba]=a$.

Si përfundim del që struktura (B, [ ]) është heap komutativ në mënyrë anësore.

POHIM 5.1.6. ***Në qoftë se grupoidi*** **(B, $\cdot$)** ***është subtraktiv, atëherë struktura*** (B, [ ])***, në të cilën*** [ ] ***është veprimi ternar nga shumëzimi sipas njëshit të djathtë të*** B***, është heap komutativ në mënyrë anësore.***

*Vërtetim.*Le të jetë (B, $\cdot$) grupoid subtraktiv. Kjo sjell, sipas Pohimit 5.1.2, që (B, $\cdot$) është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas, prandaj, sipas Rrjedhimit 5.1.1, ekziston vetëm një njësh i djathtë u në të. Le të jetë [ ] veprim ternar nga shumëzimi sipas u. Atëherë, nga Pohimit 5.1.1, struktura (B, [ ]) është heap nga shumëzimi sipas njëshit të djathtë u të grupoidit subtraktiv (B, $\cdot$). Prandaj, sipas Pohimit 5.1.3, vlen (8) dhe, sipas Pohimit 5.1.5, (B, [ ]) rezulton heap komutativ në mënyrë anësore.

POHIM 5.1.7. ***Në qoftë se struktura*** (B, [ ]) ***është një heap komutativ në mënyrë anësore, atëherë ternargrupoidi i tij*** **(B, $\cdot$)** ***sipas një elementi*** o ***në*** B***, është subtraktiv.***

Vërtetim. Le të jetë (B, [ ]) një heap komutativ në mënyrë anësore dhe o një element i fiksuar në B. Le të jetë tani (B, $\cdot$) ternargrupoidi i tij sipas o. Nga Pohimi 5.1.4, (B, $\cdot$) është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas me njësh të djathtë elementin e fiksuar o në B. Në këto kushte kemi

$$\begin{aligned} a\cdot ab &\overset{(9)}{=}[a(ab)o]\overset{(9)}{=}\\ &\overset{(9)}{=}[a[abo]o]\overset{(11)}{=}\\ &\overset{(11)}{=}[a[oba]o]\overset{(9)}{=}\\ &\overset{(9)}{=}a\cdot[oba]\overset{(10)}{=}\\ &\overset{(10)}{=}b. \end{aligned}$$

Sipas Përkufizimit 5.1.5, ternargrupoidi (B, $\cdot$) rezulton subtraktiv.

Pohimet 5.1.5 dhe 5.1.6 tregojnë se *kur grupoidi* (B, $\cdot$) *është subtraktiv, atëherë struktura* (B, [ ]) *është heap komutativ në mënyrë anësore, sido qoftë i përcaktuar veprimi ternar* [ ] *në trajtën* $[abc]=a\cdot bc$ *apo në trajtën* $[abc]=ab\cdot c$ *, për çdo* a,b,c *në* B, kurse Pohimi 5.1.7 tregon se *kur struktura* (B, [ ]) *është heap komutativ në mënyrë anësore, atëherë grupoidi* (B, $\cdot$) *është subtraktiv nëse shumëzimi* $\cdot$ *përcaktohet nga* $a\cdot b=[abo]$, *për çdo dy elemente* a,b *në* B *dhe* o *një element i fiksuar në të.*

Në terminologjinë e V.Volenec [17], bazuar në Pohimin 5.1.1 dhe në Pohimin 5.1.4, pastaj në Pohimin 5.1.6 dhe në Pohimin 5.1.7, përftojmë teoremat e mëposhtëme.

TEOREMË 5.1.1. ***Ekzistenca e një ward grupoidi të zgjidhshëm djathtas*** $(B,\ \cdot)$ **me njëshin e djathtë** u ***sjell ekzistencën e një heapi*** $(B,[\ ])$***, pikërisht heapin përkatës nga shumëzimi sipas*** u***; ekzistenca e një heapi*** $(B,[\ ])$ ***sjell ekzistencën e një ward grupoidi të zgjidhshëm djathtas*** $(B,\cdot)$***, pikërisht një ternargrupoid të tij sipas një elementi të dhënë.***

TEOREMË 5.1.2. ***Ekzistenca e një grupoidi subtraktiv*** $(B,\ \cdot)$ ***sjell ekzistencën e një heapi komutativ në mënyrë anësore, pikërisht heapin nga shumëzimi*** $(B,\ [\ ])$ ***sipas njëshit të djathtë*** u***; ekzistenca e një heapi komutativ në mënyrë anësore*** $(B,\ [\ ])$ ***sjell ekzistencën e një grupoidi subtraktiv, pikërisht ternargrupoidin*** $(B,\ \cdot\ )$ ***sipas një elementi*** o ***në*** *B****.***

Shkurt, Teorema 5.1.2, tregon se, ekzistenca e një heapi komutativ në mënyrë anësore është ekuivalente me ekzistencën e një grupoidi subtraktiv në të njëjtën bashkësi.

5.2. Sisteme të Desargut, paralelogram-hapësira dhe raporti i tyre me heape komutative anësore

Le të jetë q një relacion kuaternar në bashkësinë joboshe *B*, d.m.th. $q \subseteq B^4$. Faktin që $(x,y,z,u) \in q$ do ta shënojmë $q(x,y,z,u)$ për $(x,y,z,u) \in B^4$.

Përkufizim 5.2.1. [20] *Çifti* (B,q), *ku* q *është relacion kuaternar në B, quhet sistem i Desargut në qoftë se janë të vërteta pohimet*:

$Q1.\ \ \forall x,y,a,b,c,d \in B,\ \ q(x,a,b,y) \wedge q(x,c,d,y) \Rightarrow q(c,a,b,d);$

$Q2.\ \ \forall x,y,a,b,c,d \in B,\ \ q(b,a,x,y) \wedge q(d,c,x,y) \Rightarrow q(b,a,c,d);$

$Q3.\ \ \forall (a,b,c) \in B^3,\ \ \exists! d \in B, q(a,b,c,d).$

LEMMË. 5.2.1.[21] ***Në qoftë se*** **(***B***,** q**)** ***është sistem i Desargut, atëherë kemi***

$$1.\quad \forall a,b \in B, q(a,a,b,b) \wedge q(a,b,b,a) \tag{12}$$

$$2.\quad \forall a,b,c,d \in B,\ q(a,b,c,d) \Rightarrow q(b,a,d,c),\quad q(a,b,c,d) \Rightarrow q(d,c,b,a). \tag{13}$$

Vërtetim. 1. Le të jenë a,b të çfarëdoshëm në *B*. Atëherë, sipas $Q\,3$,

$\forall (x,a,b) \in B^3, \exists! d \in B,\ q(x,a,b,d)$. Por, $q(x,a,b,d) \wedge q(x,a,b,d) \overset{Q1}{\Rightarrow} q(a,a,b,b)$.

Po ashtu, sipas $Q\,3$,

$\forall(a,b,c)\in B^3, \exists! d\in B,\ q(a,b,c,d)$. Por, $q(a,b,c,d)\wedge q(a,b,c,d)\overset{Q2}{\Rightarrow} q(a,b,b,a)$.

2. Sipas (12), janë të vërteta pohimet $q(a,a,d,d), \forall a,d\in B$ dhe $q(d,c,c,d), \forall c,d\in B.$ Atëherë kemi:

$$\forall a,b,c,d\in B,\ q(a,b,c,d)\Leftrightarrow q(a,a,d,d)\wedge q(a,b,c,d)\overset{Q1}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Q1}{\Rightarrow} q(b,a,d,c);$$
$$q(a,b,c,d)\Leftrightarrow q(d,c,c,d)\wedge q(a,b,c,d)\overset{Q2}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Q2}{\Rightarrow} q(d,c,b,a).$$

TEOREMË 5.2.1. [22] ***Le të jetë*** B ***një bashkësi e pajisur me një veprim ternar*** [ ] ***dhe me një relacion kuaternar*** q***, të tillë që vlen ekuivalenca***

$$[abc]=d\Leftrightarrow q(a,b,c,d),\ \forall a,b,c,d\in B\,. \qquad (14)$$

Në këto kushte, $(B,\ q)$ ***është sistem i Desargut, atëherë dhe vetëm atëherë kur*** $(B,\ [\ ])$ ***është heap.***

Vërtetim. Pranojmë që $(B,\ q)$ është sistem i Desargut. Të tregojmë se për strukturën $(B,\ [\ ])$ vlejnë (1) dhe (2). Nga njera anë, duke shënuar $[abc]=x$, $[xde]=y$, marrim $[[abc]de]=y$. Nga ana tjetër, shënojmë gjithashtu $[cde]=z$. Nga (14) kemi

$$[abc]=x\Leftrightarrow q(a,b,c,x)\,,$$

$$[xde]=y\Leftrightarrow q(x,d,e,y)\,,$$

$$[cde]=z\Leftrightarrow q(c,d,e,z)\,.$$

Por $(B,\ q)$ është sistem i Desargut, prandaj kemi

$$q(x,d,e,y)\overset{(13)}{\Rightarrow} q(d,x,y,e),$$
$$q(c,d,e,z)\overset{(13)}{\Rightarrow} q(d,c,z,e),$$

$$q(d,x,y,e)\wedge q(d,c,z,e)\overset{Q1}{\Rightarrow} q(c,x,y,z)\overset{(13)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(13)}{\Rightarrow} q(z,y,x,c)\overset{(13)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(13)}{\Rightarrow} q(y,z,c,x),$$
$$q(a,b,c,x)\wedge q(y,z,c,x)\overset{Q2}{\Rightarrow} q(a,b,z,y).$$

Kjo e fundit, sipas (14), sjell $[abz]=[ab[cde]]=y$. Pra, $[[abc]de]=[ab[cde]]$, d.m.th. vlen (1).

Më tej, nga (12), $\forall a,b\in B, q(a,b,b,a)\wedge q(b,b,a,a).$ Prej këndej marrim

$$q(a,b,b,a)\overset{(14)}{\Rightarrow}[abb]=a,$$
$$q(b,b,a,a)\overset{(14)}{\Rightarrow}[bba]=a.$$

Këto barazime tregojnë se vlen dhe (2). Sipas Përkufizimit 5.1.1, rezulton që struktura (B, [ ]) është heap.

Pranojmë tani që (B, [ ]) është heap. Të tregojmë se për strukturën (B, q) vlejnë pohimet Q1, Q2 dhe Q3.

Le të jenë $q(x,a,b,y)$ dhe $q(x,c,d,y)$ për x, y, a, b, c, d të çfarëdoshëm në B. Atëherë

$$(q(x,a,b,y)\overset{(14)}{\Rightarrow}[xab]=y \text{ dhe } q(x,c,d,y)\overset{(14)}{\Rightarrow}[xcd]=y)\Rightarrow[xab]=[xcd]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[cx[xab]]=[cx[xcd]]\overset{(1)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow}[[cxx]ab]=[[cxx]cd]\overset{(2)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(2)}{\Rightarrow}[cab]=[ccd]\overset{(2)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(2)}{\Rightarrow}[cab]=d\overset{(14)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(14)}{\Rightarrow} q(c,a,b,d).$$

Pra, $\forall x,y,a,b,c,d\in B,\ q(x,a,b,y)\wedge q(x,c,d,y)\Rightarrow q(c,a,b,d)$, d. m. th. vlen Q1.

Q2 vërtetohet në mënyrë analoge. Q3 vlen nga (14).

Përkufizim 5.2.2. *Quhet sistem i plotësuar i Desargut sistemi* (B, q) *i Desargut, në të cilin vlen pohimi*

Q4. $\forall a,b,c,d\in B,\ q(a,b,c,d)\Rightarrow q(a,d,c,b).$

TEOREMË 5.2.2. ***Le të jetë** B **një bashkësi e pajisur me një veprim ternar** [ ] **dhe me një relacion kuaternar** q**, të tillë që vlen ekuivalenca*** (14). ***Në këto kushte,*** (B, q) ***është sistem** i plotësuar **i Desargut, atëherë dhe vetëm atëherë kur*** (B, [ ]) ***është heap komutativ në mënyrë anësore.***

Vërtetim. Le të jetë (B, q) sistem i plotësuar i Desargut. Nga Teorema 5.2.1, struktura (B, [ ]) është heap. Nga kushtet e mësipërme marrim gjithashtu

$$\begin{aligned} [abc]=d &\overset{(14)}{\Rightarrow} q(a,b,c,d) \overset{Q4}{\Rightarrow} \\ &\overset{Q4}{\Rightarrow} q(a,d,c,b) \overset{(13)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(13)}{\Rightarrow} q(d,a,b,c) \overset{(13)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(13)}{\Rightarrow} q(c,b,a,d) \overset{(14)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(14)}{\Rightarrow} [cba]=d, \end{aligned}$$

Për rrjedhojë $[abc]=[cba]$, $\forall a,b,c \in B$. Sipas Përkufizimit 5.1.7, rezulton që heapi (B, [ ]) është komutativ në mënyrë anësore.

Le të jetë tani (B, [ ]) heap komutativ në mënyrë anësore. Nga Teorema 5.2.1 rrjedh që struktura (B, q) është sistem i Desargut, kurse nga Përkufizimit 5.1.7 kemi që

$$[abc]=[cba] \;\; \forall a,b,c \in B. \qquad (*)$$

Ndërkaq,

$$\begin{aligned} \forall a,b,c,d \in B,\; q(a,b,c,d) &\overset{(14)}{\Rightarrow} [abc]=d \overset{(*)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(*)}{\Rightarrow} [cba]=d \overset{(14)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(14)}{\Rightarrow} q(c,b,a,d) \overset{(13)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(13)}{\Rightarrow} q(d,a,b,c) \overset{(13)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(13)}{\Rightarrow} q(a,d,c,b), \end{aligned}$$

që tregon se vlen $Q4$.

Përkufizim 5.2.3. [23] *Çifti* (B, p), *ku* p *është relacion kuaternar në B, quhet paralelogram-hapësirë në qoftë se janë të vërteta pohimet*:

$P1$. $\forall a,b,c,d \in B,\;\; p(a,b,c,d) \Rightarrow p(a,c,b,d)$;

$P2$. $\forall a,b,c,d \in B,\;\; p(a,b,c,d) \Rightarrow p(c,d,a,b)$;

$P3.\ \forall a,b,c,d,e,f \in B,\ p(a,b,c,d) \wedge p(c,d,e,f) \Rightarrow p(a,b,e,f);$

$P4.\ \forall (a,b,c) \in B^3, \exists! d \in B,\ p(a,b,c,d).$

TEOREMË 5.2.3. [21] ***Le të jetë** B **një bashkësi e pajisur me relacionet kuaternare** p**,** q **të tilla që vlen ekuivalenca***

$$q(a,b,c,d) \Leftrightarrow p(a,b,d,c),\ \forall a,b,c,d \in B \tag{15}$$

Në këto kushte,** $(B,\ p)$ **është paralelogram-hapësirë, atëherë dhe vetëm atëherë kur** $(B,\ q)$ **është sistem i** plotësuar **i Desargut .

Vërtetim. Le të jetë $(B,\ p)$ paralelogram-hapësirë. Duke patur parasysh dhe (15) kemi: $\forall x,y,a,b,c,d \in B,$

$$\begin{aligned} q(x,a,b,y) \wedge q(x,c,d,y) &\overset{(15)}{\Rightarrow} p(x,a,y,b) \wedge p(x,c,y,d) \overset{P1}{\Rightarrow} \\ &\overset{P1}{\Rightarrow} p(x,y,a,b) \wedge p(x,y,c,d) \overset{P2}{\Rightarrow} \\ &\overset{P2}{\Rightarrow} p(x,y,a,b) \wedge p(c,d,x,y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow p(c,d,x,y) \wedge p(x,y,a,b) \overset{P3}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{P3}{\Rightarrow} p(c,d,a,b) \overset{P1}{\Rightarrow} \\ &\overset{P1}{\Rightarrow} p(c,a,d,b) \overset{(15)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(15)}{\Rightarrow} q(c,a,b,d), \end{aligned}$$

që tregon se vlen $Q1$. Vlen edhe $Q2$, sepse $\forall x,y,a,b,c,d \in B$ kemi:

$$\begin{aligned} q(b,a,x,y) \wedge q(d,c,x,y) &\overset{(15)}{\Rightarrow} p(b,a,y,x) \wedge p(d,c,y,x) \overset{P2}{\Rightarrow} \\ &\overset{P2}{\Rightarrow} p(b,a,y,x) \wedge p(y,x,d,c) \overset{P3}{\Rightarrow} \\ &\overset{P3}{\Rightarrow} p(b,a,d,c) \overset{(15)}{\Rightarrow} \\ &\overset{(15)}{\Rightarrow} q(b,a,c,d). \end{aligned}$$

Le të jetë (a,b,c) një treshe e çfarëdoshme nga B^3. Atëherë dhe $(b,c,a) \in B^3$ prandaj, sipas $P4$, $\exists! d \in B$, për të cilën kemi $p(b,c,a,d)$. Por,

$$p(b,c,a,d) \overset{P2}{\Rightarrow} p(a,d,b,c) \overset{P1}{\Rightarrow}$$
$$\overset{P1}{\Rightarrow} p(a,b,d,c) \overset{(15)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(15)}{\Rightarrow} q(a,b,c,d),$$

që tregon se vlen $Q3$. Kurse, që vlen $Q4$ del nga implikimet:

$$q(a,b,c,d) \overset{(15)}{\Rightarrow} p(a,b,d,c) \overset{P1}{\Rightarrow}$$
$$\overset{P1}{\Rightarrow} p(a,d,b,c) \overset{(15)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(15)}{\Rightarrow} q(a,d,c,b).$$

Le të jetë tani (B, p) sistem i plotësuar i Desargut. Atëherë

$$\forall a,b,c,d \in B,\ p(a,b,c,d) \overset{(15)}{\Rightarrow} q(a,b,d,c) \overset{D4}{\Rightarrow}$$
$$\overset{D4}{\Rightarrow} q(a,c,d,b) \overset{(15)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(15)}{\Rightarrow} p(a,c,b,d);$$

$$p(a,b,c,d) \overset{(15)}{\Rightarrow} q(a,b,d,c) \overset{(13)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(13)}{\Rightarrow} q(c,d,b,a) \overset{(15)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(15)}{\Rightarrow} p(c,d,a,b),$$

d. m. th. vlejnë $P1$, $P2$. Vlen edhe $P3$, sepse $\forall a,b,c,d,e,f \in B$ kemi:

$$p(a,b,c,d) \wedge p(c,d,e,f) \overset{(15)}{\Rightarrow} q(a,b,d,c) \wedge q(c,d,f,e) \overset{(13)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(13)}{\Rightarrow} q(a,b,d,c) \wedge q(e,f,d,c) \overset{Q2}{\Rightarrow}$$
$$\overset{Q2}{\Rightarrow} q(a,b,f,e) \overset{(15)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(15)}{\Rightarrow} p(a,b,e,f).$$

Së fundi, le të jetë (a,b,c) një treshe e çfarëdoshme nga B^3. Atëherë dhe $(b,c,a) \in B^3$, prandaj, sipas $Q3$, $\exists! d \in B$, për të cilën kemi $q(b,a,c,d)$. Por,

$$q(b,a,c,d) \overset{(13)}{\Rightarrow} q(a,b,d,c) \overset{(15)}{\Rightarrow} p(a,b,c,d),$$

që tregon se vlen edhe $P4$.

TEOREMË 5.2.4. ***Le të jetë*** B ***një bashkësi e pajisur me një veprim ternar*** [ ] ***dhe me një relacion kuaternar*** p***, të tillë që vlen ekuivalenca***

$$[abc] = d \Leftrightarrow p(a,b,d,c),\ \forall a,b,c,d \in B \tag{16}$$

Në këto kushte, $(B,\ p)$ ***është paralelogram-hapësirë, atëherë dhe vetëm atëherë kur*** $(B,$ [ ]) ***është heap komutativ në mënyrë anësore.***

Vërtetim. Krahas relacionit $p \subseteq B^4$ formojmë relacionin $q = \left\{(a,b,c,d) \in B^4 \,\middle|\, (a,b,d,c) \in p\right\}$, që do të thotë se vlen ekuivalenca $q(a,b,c,d) \Leftrightarrow p(a,b,d,c),\ \forall a,b,c,d \in B$. Sipas Teoremës 5.2.3, kjo sjell që $(B,\ p)$ është paralelogram-hapësirë, atëherë dhe vetëm atëherë kur $(B,\ q)$ është sistem i plotësuar i Desargut.

Veç kësaj, duke patur parasysh (16), rezulton se vlen edhe ekuivalenca

$$[abc] = d \Leftrightarrow q(a,b,c,d),\ \forall a,b,c,d \in B\,,$$

e cila, sipas Teoremës 5.2.2, sjell që $(B,\ q)$ është sistem i plotësuar i Desargut, atëherë dhe vetëm atëherë kur $(B,$ [ ]) është heap komutativ në mënyrë anësore. Si përfundim marrim se, kur vlen (16), $(B,\ p)$ është paralelogram-hapësirë, atëherë dhe vetëm atëherë kur $(B,$ [ ]) është heap komutativ në mënyrë anësore.

TEOREMË 5.2.5. ***Le të jetë*** B ***një bashkësi e pajisur me një shumëzim*** $\cdot$ ***dhe me një relacion kuaternar*** q***, të tillë që vlen ekuivalenca***

$$a \cdot bc = d \Leftrightarrow q(a,b,c,d),\ \forall a,b,c,d \in B \tag{17}$$

Në këto kushte, $(B,\ \cdot)$ ***është grupoid subtraktiv, atëherë dhe vetëm atëherë kur*** (B, q) ***është sistem*** *i plotësuar* ***i Desargut***.

Vërtetim. Futim në B veprimin ternar [ ] të përcaktuar nga (8):

$$[abc] = a \cdot bc\,,\ \forall a,b,c \in B\,.$$

Atëherë ekuivalenca (17) merr pamjen (16):

$$[abc] = d \Leftrightarrow q(a,b,c,d),\ \forall a,b,c,d \in B\,.$$

Prandaj, në qoftëse grupoidi $(B, \ \cdot)$ është subtraktiv, nga Pohimi 5.1.5, struktura $(B, [\ ])$ rezulton heap komutativ në mënyrë anësore; për rrjedhojë, sipas Teoremës 5.2.2, (B, q) është sistem i plotësuar i Desargut.

Anasjellas, në qoftëse (B, q) është sistem i plotësuar i Desargut, sipas Teoremës 5.2.2, struktura $(B, [\ ])$ rezulton heap komutativ në mënyrë anësore. Por, për $c = u$, $[abc] = a \cdot bc \Rightarrow [abu] = a \cdot b.$ Pra, $(B, \ \cdot)$ rezulton ternargrupoid i heapit $(B, [\ ])$ sipas u. Prandaj, sipas Teoremës 5.1.7, ai është subtraktiv.

RRJEDHIM. ***Le të jetë*** B ***një bashkësi e pajisur me një shumëzim*** $\cdot$ ***dhe me një relacion kuaternar*** q***, të tillë që vlen ekuivalenca*** $a \cdot bc = d \Leftrightarrow p(a,b,d,c)\ \forall a,\ b,\ c,\ d \in B.$

Në këto kushte, $(B, \ \cdot)$ ***është grupoid subtraktiv, atëherë dhe vetëm atëherë kur*** (B, p) ***është paralelogram- hapësirë***.

Nga teoremat 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4 dhe 5.2.5 , duket me një herë, se vlen kjo

TEOREMË 5.2.6. ***Në të njejtën bashkësi: ekzistenca e një heapi komutativ në mënyrë anësore, ekzistenca e një paralelogram- hapësire, ekzistenca e një sistemi të plotësuar të Desargut dhe ekzistenca e një grupoidi subtraktiv janë ekuivalente njera me tjetrën.***

Pohimi i mëposhtëm jep një kusht të mjaftueshëm për ekzistencën e sistemi të Desargut.

POHIM 5.2.1. ***Le të jetë*** B ***një bashkësi e pajisur me një shumëzim*** $\cdot$ ***dhe me një relacion kuaternar*** q***, të tillë që vlen ekuivalenca***

$$ab = cd \Leftrightarrow q(a,b,d,c),\ \forall a,b,c,d \in B \tag{18}$$

Në këto kushte,

1. ***në qoftë se u është njësh i djathtë në*** $(B, \ \cdot)$***, atëherë vlen***

ekuivalenca $ab = c \Leftrightarrow q(a,b,u,c),\ \forall a,b,c \in B.$

2. ***në qoftë se*** $(B, \ \cdot)$ ***është ward kuazigrup, atëherë*** $(B, \ q)$ ***është sistem i Desargut***.

Vërtetim. 1. Vërtetësia e këtij pohimi është evidente. 2. Kushti që $(B, \ \cdot)$ është ward kuazigrup do të thotë që $(B, \ \cdot)$ është ward grupoid dhe në të kanë zgjidhje te vetme secili nga ekuacionet $ax = b$ dhe $xa = b$ për çdo a, b në B. Për rrjedhojë ai është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas, prandaj ka njësh të djathtë u. Në këto kushte:

$Q1$. Le të jetë $q(x,a,b,y)$ dhe $q(x,c,d,y)$, për x,a,b,c,d,y nga B. Nga (18), kemi $xa = yb$ dhe $xc = yd$. Prej këndej marrim

$$ca \overset{(3)}{=} cx \cdot ax \overset{(5')}{=} (u \cdot xc)(u \cdot xa) =$$
$$= (u \cdot yd)(u \cdot yb) \overset{(5')}{=} dy \cdot by \overset{(3)}{=} db.$$

Pra, $ca = db$ që, sipas (18) implikon $q(c,a,b,d)$.

$Q2$. Le të jetë tani $q(b,a,x,y)$ dhe $q(d,c,x,y)$, për x,a,b,c,d,y nga B. Atëherë kemi

$$q(b,a,x,y) \wedge q(d,c,x,y) \overset{(18)}{\Rightarrow} ba = yx \wedge dc = yx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ba = dc \overset{(18)}{\Rightarrow} q(b,a,c,d).$$

$Q3$. Nga fakti që $(B, \cdot)$ është kuazigrup kemi

$$\forall (a,b,c) \in B^3, \exists! d \in B, dc = ab \Rightarrow ab = dc \overset{(18)}{\Rightarrow} q(a,b,c,d).$$

RRJEDHIM. ***Le të jetë*** B ***një bashkësi e pajisur me një shumëzim*** $\cdot$ ***dhe me një relacion kuaternar*** q***, të tillë që vlen ekuivalenca*** (18)***. Në këto kushte, në qoftë se*** $(B, \cdot)$ ***është grupoid subtraktiv, atëherë*** (B, q) ***është sistem i Desargut***.

Vërtetim. Në qoftë se $(B, \cdot)$ është grupoid subtraktiv, nga Pohimi 5.1.2, ai është ward grupoid i zgjidhshëm djathtas, për rrjedhojë është ward kuazigrup. Jemi në kushtet e Pohimit 5.2.1, prandaj (B, q) është sistem i Desargut.

5.3. Modeli i një heapi komutativ anësor në një plan afin të Desargut

Le të jetë struktura e incidencës $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një plan afin i Desargut, dhënë nga Përkufizimi 3.5.1. Një plan i tillë jep mundësinë e ndërtimit të një modeli të një heapi komutativ anësor në të, siç tregohet më poshtë.

Në një plan afin të Desargut në paragrafin 3.5 përkufizohet vektori si çift i radhitur pikash nga $\mathcal{P}$. Nëse ky vektor është çifti (A, B) i dy pikave të ndryshme A, B ai shënohet $\overrightarrow{AB}$; pika A quhet fillim, pika B quhet mbarim i tij, kurse drejtëza AB quhet mbajtëse e tij. Për $A = B$, $\overrightarrow{AB}$ quhet *zero vektor*.

Barazimi i dy vektorëve përkufizohet:

(i) $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow D = C$;

(ii) $\forall \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;

(iii) Në qoftë se mbajtëset e dy vektorëve jozero $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ janë drejtëza të ndryshme, atëherë $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow AB \parallel DC$ dhe $AD \parallel BC$ (Fig. 1).

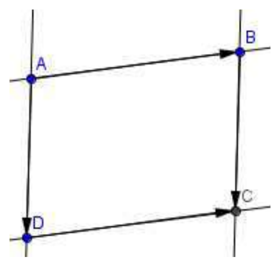

Fig. 1

(iv) Në qoftë se mbajtëset e dy vektorëve jo zero $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ janë drejtëza të njejta, atëherë $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, kur ekziston një vektor $\overrightarrow{MN}$ me mbështetëse $MN \neq AB$ i tillë që $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DC}$ (Fig. 2).

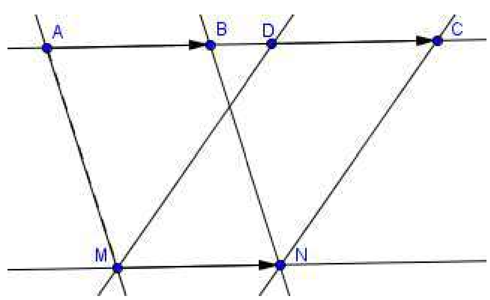

Fig. 2

Nga ky përkufizim del e vërtetë njëvlerësia

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \qquad (19)$$

Kur pikat A, B, C janë jokolineare, pika D, sipas (iii), është kulmi i katërt i paralelogramit $ABCD$, kulmet e të cilit përshkruhen radhazi sipas brinjëve, duke filluar nga A (Fig. 1).

Kur pikat A, B, C janë kolineare, dallohen rastet e mëposhtme për përcaktimin e pikës D:

1. $A = B = C$. Në këtë rast barazimi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ merr pamjen $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{DA}$; sipas ($i$), sjell $D = A$.

2. $A = B \neq C$. Në këtë rast barazimi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ merr pamjen $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{DC}$; sipas (*i*), sjell $D = C$.

3. $A \neq B = C$. Në këtë rast barazimi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ merr pamjen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$; sipas (*ii*), sjell $D = A$.

4. $B \neq A = C$. Në këtë rast barazimi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ merr pamjen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}$; sipas (*iv*), pika D përcaktohet me anë të dy paralelogrameve;

5. A, B, C janë të ndryshme. Në këtë rast, sipas (*iv*), pika D përcaktohet me anë të dy paralelogrameve.

Prej kendej del se $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}^3$, $\exists! D \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Përcaktojmë në $\mathcal{P}$ veprimin ternar [ ]: $\mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}$ të tillë që

$$[ABC] = D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \ \forall (A, B, C) \in \mathcal{P}^3 \tag{20}$$

Konstruktuam në në këtë mënyrë strukturën ternare ($\mathcal{P}$, [ ]) në një plan afin të Desargut. Në pohimin e mëposhtëm vërtetojmë se ajo është ***modeli i një heapi komutativ anësor në një plan të tillë.***

POHIM 5.3.1. ***Struktura ternare ($\mathcal{P}$, [ ]) është heap komutativ anësor.***

Vërtetim. Le të jenë pikat $A, B, C, D, E \in \mathcal{P}$. Shënojmë $[ABC] = X$, $[XDE] = Y$, $[\mathrm{CDE}] = Z$, $[ABZ] = T$. Nga (19) dhe (20) kemi

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} {[ABC]}=X \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XC}; \\ {[XDE]}=Y \Leftrightarrow \overrightarrow{XD}=\overrightarrow{YE} \overset{(19)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{XY}=\overrightarrow{DE} \end{array}\right]; \\ \left.\begin{array}{l} {[CDE]}=Z \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ZE} \overset{(19)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{CZ}=\overrightarrow{DE}; \\ {[ABZ]}=T \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{TZ} \end{array}\right] \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{TZ}; \\ \overrightarrow{XY}=\overrightarrow{CZ} \overset{(19)}{\Rightarrow} \overrightarrow{XC}=\overrightarrow{YZ} \end{array}\right]$$

Prei kendej marrim $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{TZ} \Rightarrow Y = T \Rightarrow [[ABC]DE] = [AB[CDE]]$. Vlen kështu pohimi

$$[[ABC]DE] = [AB[CDE]] \ , \ \forall A, B, C, D, E \in \mathcal{P}. \tag{*}$$

Në Fig. 3 paraqitet një ilustrim i tij.

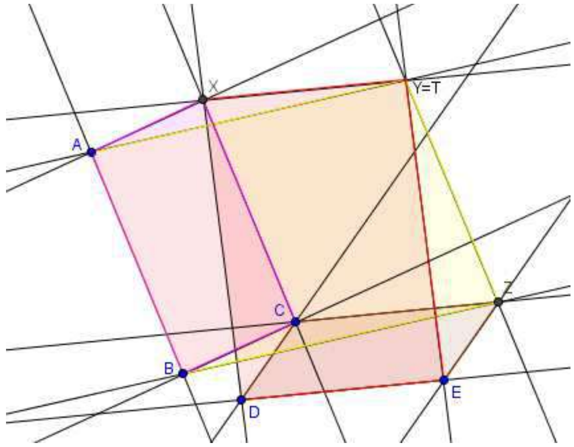

Fig. 3

Më tej, sipas (20), $[ABB]=D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$. Sipas (*ii*), $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB} \Rightarrow D=A$. Për rrjedhojë $[ABB]=A$. Po ashtu sipas (20), $[BBA]=D \Leftrightarrow \overrightarrow{BB}=\overrightarrow{DA}$. Sipas (*i*), $\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{DA} \Rightarrow D=A$. Për rrjedhojë $[BBA]=A$. Vlen kështu

$$[ABB]=[BBA]=A \qquad (**)$$

Së fundi, për çdo tri pika A,B,C nga $\mathcal{P}$, kemi

$$\left.\begin{array}{l}[ABC]=D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC};\\ [CBA]=E \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EA} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB} \overset{(19)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}\end{array}\right] \Rightarrow \overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow D=E.$$

Si rezultat marrim

$$[ABC]=[CBA], \quad \forall (A,B,C)\in \mathcal{P}^3 \qquad (***)$$

Rezultatet $(*)$, $(**)$, $(***)$, sipas Përkufizimit 5.1.1 dhe Përkufizimit 5.1.7, tregojnë se Pohimi 5.4.1 është i vërtetë.

PËRFUNDIME

Në këtë disertacion paraqitet në mënyrë esenciale teoria e përgjithshme e strukturave algjebrike ternare dhe ajo e planeve afine dhe projektive. Bazuar në këto dy teori ne jemi përpjekur të zbulojmë lidhje të tjera midis teorisë së strukturave algjebrike ternare dhe teorisë së planeve afine e projektive të paraqitura në trajtë modelesh, që mund të gjejnë aplikime në disiplina të ndryshme të matematikës bashkëkohore si dhe në shkencat inxhinierike, kompjuterike, të informacionit e tj.

Teoria e ndërtuar është vënë në funksion të konstruktimit të modeleve të mëposhtëme:

- Modeli i një unaze ternare planare në një plan të Desargut.
- Modeli i një gjysmëunaze ternare gjysmësubtraktive dhe regulare në një plan projektiv të fundëm.
- Modeli i një heapi komutativ anësor në një plan afin të Desargut.

Procesi i ndërtimit të çdo modeli është shoqëruar me plotësimin e teorisë së strukturave algjebrike ternare dhe asaj të planeve afine dhe projektive me formulimin e disa vetive të reja dhe me futjen e disa koncepteve të reja (si *veprim ternar nga shumëzimi*, *heap nga shumëzimi sipas një elementi*, *ternargrupoid i një strukture ternare*, *system i plotësuar i Desargut e tj.*), që na kanë lehtësuar jo vetëm vërtetimin e tyre, por dhe të disa pohimeve të njohura të atyre teorive. Në këtë drejtim kanë lehtësuar shumë proçesin e vërtetimeve paraqitja e shumë përkufizimeve në trajtën e skemave logjike siç janë përkufizimi i koordinatave të pikës në një plan afin të koordinatizuar (skema (4),(5)), përkufizimi i pjerrësisë (skema (6)) dhe ai i prerjeordinatës (skema (7)) së një drejtëze në të (skema (8)), përkufizimi i veprimit ternar në S (skema (9)) në Kreun 3 dhe përkufizimi 4.2.1, përkufizimi 4.2.2 në Kreun 4. Veçojmë më poshtë disa nga pohimet më kryesore që lidhen me këto veti të reja:

- *Në planin afin* $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *koordinatizuar nga sistemi koordinativ* (O, I, OX, OY, OI) *dhe nga bijeksioni* $\sigma : \mathcal{P}_u \rightarrow S$, *bijeksioni* σ *është izomorfizëm i grupoidit* $(\mathcal{P}_u, \oplus)$ *në grupoidin* (S, +).
- *Në planin afin* $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *koordinatizuar nga sistemi koordinativ* (O, I, OX, OY, OI) *dhe nga bijeksioni* $\sigma : \mathcal{P}_u \rightarrow S$, *bijeksioni* σ *është izomorfizëm i grupoidit* $(\mathcal{P}_u, *)$ *në grupoidin* (S, $\cdot$).
- *Struktura* $(\mathcal{P}_u, \oplus, *)$ *është izomorfe me strukturën* $(S, +, \cdot)$.

• *Në planin e Desargut* $\mathcal{D}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *koordinatizuar nga sistemi koordinativ* (O, I, OX, OY, u) *dhe nga bijeksioni* $\sigma : \mathcal{P}_u \to S$, *grupoidi* $(S, +)$ *është grup abeljan.*

• *Në një unazë ternare lineare (S, t) shumëzimi është shpërndarës nga e djathta lidhur me mbledhjen. Në një unazë ternare lineare (S, t) të një plani afin* $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *ku vlen Pohimi D2, shumëzimi është shpërndarës edhe nga e majta lidhur me mbledhjen.*

• *Në një unazë ternare planare (S, t) të një plani afin* $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *ku vlen Pohimi D2, shumëzimi është shoqërues.*

• *Unaza ternare planare (S, t) e një plani afin, të koordinatizuar, ku vlejnë Pohimi D1 dhe Pohimi D2, është unazë e zakonshme lidhur me mbledhjen + dhe shumëzimin · të përcaktuara në S si bashkësia e koordinatave të tij .*

• *Në një plan projektiv të fundëm të koordinatizuar, ku* $\mathcal{V} = \{P \in \mathcal{P} | P \, \mathrm{I} \, \ell, \; P \neq J\}$,

a) *Grupoidi* $(\mathcal{V}, +)$ *është gjysmëgrup komutativ,*
b) *Grupoidi* $(\mathcal{V}, \otimes)$ *është gjysmëgrup,*
c) *Në* $\mathcal{V}$ *shumëzimi* $\otimes$ *është shpërndarës lidhur me mbledhjen* $+$, *d. m. th.*

$$\forall A, B, C \in \mathcal{V}, (A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C ;$$

$$A\otimes (B+C) = A\otimes B + A\otimes C$$

• *Struktura ternare* $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ *është gjysmëunazë ternare.*

• *Gjysmëunaza ternare* $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ *është gjysmëunazë ternare me zero.*

• *Gjysmëunaza ternare* $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ *është gjysmësubtraktive dhe regulare.*

• *Ekzistenca e një Ward grupoidi të zgjidhshëm djathtas* $(B, \cdot)$ *me njëshin e djathtë* u *sjell ekzistencën e një heapi* $(B, [\ ])$, *pikërisht heapin përkatës nga shumëzimi sipas* u; *ekzistenca e një heapi* $(B, [\ ])$ *sjell ekzistencën e një Ward grupoidi të zgjidhshëm djathtas* $(B, \cdot)$, *pikërisht një ternargrupoid të tij sipas një elementi të dhënë.*

• *Ekzistenca e një grupoidi subtraktiv* $(B, \cdot)$ *sjell ekzistencën e një heapi komutativ në mënyrë anësore, pikërisht heapin nga shumëzimi* $(B, [\ ])$ *sipas njëshit të djathtë* u; *ekzistenca e një heapi komutativ në mënyrë anësore* $(B, [\ ])$ *sjell ekzistencën e një grupoidi subtraktiv, pikërisht ternargrupoidin* $(B, \cdot)$ *sipas një elementi* o *në B.*

• *Le të jetë B një bashkësi e pajisur me një veprim ternar* $[\ ]$ *dhe me një relacion kuaternar* q, *të tillë që vlen ekuivalenca* $[abc] = d \Leftrightarrow q(a,b,c,d)$, $\forall a,b,c,d \in B$.

Në këto kushte, (B, q) *është sistem i plotësuar i Desargut, atëherë dhe vetëm atëherë kur* $(B, [\ ])$ *është heap komutativ në mënyrë anësore.*

• *Në një plan afin* $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *të Desargut, ku veprimi ternar* $[\ ]$ *përcaktohet nga* $[ABC]=D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\forall(A,B,C)\in \mathcal{P}^3$, *struktura ternare* $(\mathcal{P}, [\ ])$ *është heap komutativ anësor.*

Së fundi theksojmë që gjetja e modeleve të këtyre strukturave të veçanta algjebrike në gjeometrinë projektive ka qenë një detyrë sa e vështirë dhe e rëndësishme e disertacionit, për vetë faktin që ato tregojnë lidhjen mes vetive algjebrike të strukturave ternare dhe vetive gjeometrike të planeve projektive dhe afine. Mendojmë që ky përfundim është i një rëndësie të veçantë.

REKOMANDIME

1. Ndërtim modelesh të tjera, që zbulojnë lidhje të tjera midis teorisë së strukturave algjebrike ternare dhe Gjeometrisë projektive, sidomos Gjeometrisë projektive në hapësiren euklidiane.

2. Sistemet e Desargut dhe parallelogram-hapësirat janë struktura të relacioneve kuaternare, por jo struktura algjebrike kuaternare, ku relacionet kuaternare të jenë veprime kuaternare. Të shikohet mundësia e studimit të tyre në këto raste.

3. Duke u bazuar në modelet e ndërtuara, të shikohet mundësia e aplikimeve të tyre në shkencat inxhinieriko- informatike.

SUMMARY

This work is elaborated basing on the investigations of fundamental results about ternary algebraic structures and projective planes. So, we construct some models of such structures in affine and projective planes. The main objective of the present thesis is to extend different fundamental results of semirings, ternary semigroups and ternary rings to ternary semirings and heaps. Since there has been a remarkable growth of semiring theory, it has been possible to study ternary semiring to a good extent, the outcome of which is the present thesis. Based on the algebraic properties of these ternary structures and geometric properties of projective and affine planes we construct some models of ternary structure in projective and affine planes.

The process of constructing each model is associated with completion theory of ternary algebraic structures and theory of affine and projective plane with formulation of some new features and introducing of some new concepts like *ternary operation by multiplication, heap by multiplication by an element, ternargroupoid of a ternary structure, completed Desargues system.* Thus we have facilitated not only their proofs but and some propositions of those theories.

In these context, the dissertation aims is detecting other relation between the theory of ternary algebraic structures and theory of affine and projective planes featured like models, which can apply in some disciplines.

The present thesis consists of five chapters namely,

In Chapter 1, we introduce the notion of n-ary operation on the set, ternary operation and some of their properties. Also we define ternary semiring like a ternary structure (B, t), where t is associative and ternary semiring consisting of nonempty set B together with a binary operation called addition and ternary multiplication t which forms a commutative group relative to addition, a ternary semigroup relative to ternary multiplication and distributive laws hold. Completing with other properties those ternary structure we give the relation with geometric properties in projective and affine plane.

In Chapter 2, given the fact that an affine and projective plane are incidence structures which satisfy certain axioms, first we introduce the basic notions of these

structures and then proof some of their proposition. Here we show that can easily construct an affine plane from a given projective or vice versa simply by deleting or adding a line and all the points on it.

By means of coordinatization of these planes we create the opportunity for discussion of other methods for coordinatization of projective and affine planes.

In Chapter 3, we show that in Desargues affine plane, in certain condition, planar ternary ring (*S*, *t*) turns into usually associative ring (*S*, +, **·**). So, in an affine plane $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) coordinatizing from a coordinative system (*O*, *I*, *OX*, *OY*, *OI*) and bijection $\sigma : \mathcal{P}_u \to S$ $\sigma : (OI) \to S$, determine a ternary operation $t : S^3 \to S$, which we call planar ternary operation. We prove that every coordinatizing affine plane $\mathcal{A}$=($\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$) determine a planar ternary ring (*S*, *t*), where *S* is the set of coordinates of affine plane and *t* its planar ternary operation. And vice versa. Also we introduce the binary operation of addition and multiplication in *S* and underline relations $a+b=t(a,1,b)$, $a \cdot b = t(a,b,0)$. Since affine plane is fulfilled with the first Desargues axiom D1, related to the structure $(S,+,\cdot)$ in that plane, considering some isomorphism imply that $(S,+)$ is abelian group. In the following we show that when in an affine plane except first Desargues axiom D1 also hold the second Desargues axiom D2, then its planar ternary ring (S,t) is the model of usual associative ring $(S,+,\cdot)$.

In Chapter 4, our goal is to show that a set $\mathcal{V}$ of points of line ℓ equipped with binary operation called addition and ternary multiplication forms a semisubtractive and regular ternary semiring. Using Desargues theorem, we proof that this ternary structure is the model of a semisubtractive and regular ternary semiring in projective plane.

In Chapter 5, we study some properties of heaps like algebraic structure with a ternary operation in combination with types of groupoids, introducing meanings of ternary operation from multiplication, heaps from multiplication and of ternargroupoid. Further, we constructed a model of a laterally commutative heap in Desargues plane.

Finding the models of these ternary algebraic structures has been a difficult and important task as well for the dissertation, for the fact that it show the relation between algebraic properties of ternary structures and geometric properties of a projective and affine planes. Thesis ends with a set of references that aim precisely on algebraic ternary structures and projective plane.

REFERENCAT

[1] K. Filipi, *Algjebra abstrakte*. Tiranë, 2013.

[2] S. Kar and B. Maity, “*Congruences on ternary semigroups*” *J. Chugcheong Math. Soc*, vol. 20, no. 3, 2007.

[3] T. K. Dutta and S. Kar, “*A Note on Regular Ternary Semirings*” vol. 46, pp. 357–365, 2006.

[4] M. L. Santiago and S. Sri Bala, “*Ternary semigroups*” *Semigr. Forum*, vol. 81, no. 2, pp. 380–388, Jul. 2010.

[5] G. Sheeja and S. S. Bala, “*Congruences on ternary semigroups*” Quasigroups and related systems 20 (2012) 113-124.

[6] T. K. Dutta and S. Kar, “*On ternary semifields*” *Discuss. Math. - Gen. Algebr. Appl.*, vol. 24, no. 2, p. 185, 2004.

[7] S. Kar, “*On quasi-ideals and bi-ideals in ternary semirings*” *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 2005, no. 18, pp. 3015–3023, 2005.

[8] D. Hughes, & F. Piper, "*Projective Planes"*. 1973

[9] D. Hughes, & F. Piper, "*Design theory"*. London, New York, 1985.

[10] M. K. Bennett, "*Affine and Projective Geometry"*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[11] P. Scherk, “*On the fundamental theorem of affine geometry*” *Can. Math. Bull.*, vol. 5, pp. 67–69, Jan. 1962.

[12] P. Dembowski, "*Finite Geometries"*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968.

[13] Z. Snajder," *Nacrtna geometrija"*. 1981.

[14] F. Ibraimi-Sadiki, “*Unazat ternare dhe rrafshet projektive*" (Temë magjistrature). 2007.

[15] R. Case, "*Projective geometry an introduction"*. 2006.

[16] V.V.Vagner, “*Teorija obobschennih grud i obobscenih grupp*” *Mat. Sb.*, vol. 32, no. 74, pp. 545–632, 1953.

[17] V. Volenec, “*Heaps and Right Solvable Ward Groupoids*” Journal of Algebra **156**(1993),1–4.

[18] M. Polonijo, “*A note on Ward quasigroups*” ,*“Al.I.Cusa” Iasi.Sect.I.a Mat.*, vol. 32, pp. 5–10, 1986.

[19] V. Volenec, “*Subtractive grupoids and lateraly comutative heaps*” 1990.

[20] D. Vakarelov, “*Dezargovi sistemi*” *God. Univ. Sofija Mat. Fak.*, vol. 64, pp. 227–235, 1971.

[21] M. Polonijo, “*Desargues systems and Ward quasigroups*” pp. 97–102, 1989.

[22] Z. Kolar, “*Heap – ternary algebraic structure*” vol. 5, pp. 87–95, 2000.

[23] J. Ostermann, F.; Schmidt, “*Begründung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften*” *Math.-Phys. Semesterber., N. F.*, vol. 10, pp. 47–64, 1963.

[24] V.Volenec, "*A characterization of laterally commutative heaps*" Algebra Univ. 25(1988), 388–390.

[25] V.Volenec, "*Parallelogram spaces, laterally commutative heaps and semiaffine spaces*" Mitt. Math. Sem. Giessen **185**(1988),78–81.

[26] J.Morgado, "*Nota sobre quasigrupos subtractivos*" Gaz. Mat. **92–93**(1963), 11–17.

[27] F. Ostermann, J. Schmidt, "*Begrundung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften*" Math.-phys. Semesterber. **10** (1963), 47–64.

[28] W. Bos, G.Wolff, "*Affine Raume"*, I,Mitt. Math. Sem. Giessen **129** (1978), 1–115.

[29] J. M.Cardoso, C, P. da Sylva, "*On Ward quasigroups*" An. Stiint Univ. “Al. I. Cuza”, Iasi Sect. Ia Math. **24**(1978),231–233.

[30] F. Sadiki, K. Filipi *"Regular Ternary Semirings with Semi-Subtractive Properties and their interpretation in Projective Planes”*, International Journal of Mathematical Sciences, Recent Science Publications, 2013, Vol 33, Issue 2.p.1356-1368.

[31] F. Buekenhout, " *Handbook of Incidence Geometry"* Buildings and Foundations, Elsevier, Amsterdam, 1995.

[32] D.E. Taylor, "*The Geometry of the Classical Groups"*, Heldermann Verlag, Berlin, 1992.

[33] W. G. Lister, "*Ternary Rings*" Trans. Amer. Math. Soc., 154(1971), 37-55.

[34] G.PICERT, "Projektive Ebenen". Berlin 1975.

[35] V.V. Wagner, *"The theory of generalized heaps and generalized groups"* (Russian), Mat. Sbornik N.S. 32 (1953), 545–632.

[36] E. Artin, "*Geometric Algebra*", Interscience, New York, 1957.

[37] F. Bachmann, "*Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*" Springer, Berlin, 1959.

[38] G. Birkhoff, & S.Mac Lane, "*A survey of modern Algebra*", Mac Millan, New York, 1977.

[39] L. Blumental, "*A modern view of geometry*", San Francisko, 1961.

[40] S. Bilaniuk, "*A problem course on Projective Planes*", Trent University, Ontario, Canada, 2003.

[41] Sh. Baxhaku, "*Gjeometria projektive*", Universiteti Shtetëror i Tiranës, Tiranë, 1974.

[42] H.S.M.Coxeter," *Projective Geometry*", Blaisdell Publishing Company, New York, London, Toronto 1974.

[43] H.S.M.Coxeter, "*Non-Euclidian Geometry*", University of Toronto Press, Toronto, 1968.

[44] H.S.M.Coxeter, " *Introduction to Geometry*" 2nd ed., Wiley, New York, 1969.

[45] A. Heyting, "*Axiomatic Projective Geometry*", Amsterdam, 1963.

[46] D. Hughes, "*Additive and multiplicative loops of planar ternary rings*", Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955).

[47] M. Hall, "*Theory of Groups*", London, New York, 1959.

[48] M. Hall, "*Projective Planes*", Trans. Am. Math. Society, 54(229-277).

[49] R. Johnson, "*Modern Geometry*", Boston, 1929.

[50] H. Lüneburg, "*Lectures on Projective Planes*", University of Ilionis, Chicago, 1969.

[51] D. Palman, "*Projektivna geometrija*", Škollska Knjiga, Zagreb, 1984.

[52] O. Veblen, & J. Young, "*Projective Geometry*", Vol. I & II, Boston, 1938.

[53] P. Wilker, "*Double loops and Ternary Rings*", Proc. Amer. Math. Soc., 6, 1964.

[54] M. R. Adhikari, M. K. Sen, and H. J. Weinert, "On k-regular semirings", Bull. Cal. Math. Soc. 88 (1996), No. 2, 141-144.

[55] M. R. Adhikari, and M. K. Das, "*Structure Spaces of Semirings*", Bull. Cal. Math. Soc. 86 (1994), 313-317.

[56] S.Bourne, "*On homomorphism theorem for Semirings",* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38(1952), 118-119.

[57] L.Dale, and J. D. Pitts, "*Euclidean and Gaussian semirings*", Kyungpook Math. J. 18(1978), 17-22.

[58] F.Ibraimi, A. Ibraimi, *"Relation between properties of Ternary Semirings and Projective Planes"*, International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012 vol.80 issue. 1 p. 1-15.

[59] R. A.Good & D. R. Hughes, "*Associated groups for a semigroup*", Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 624-625.

[60] U.Hebisch & H. J.Weinert, " *Semirings - Algebraic Theory and Applications in Computer Science*", World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, 1998.

[61] M. R. Hestenes,"*A ternary algebra with applications to matices and linear transformations*" Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 11 (1962), 138-194.

[62] M. R.Hestenes, "On ternary algebra", Collection of articles dedicated to the memory of Abraham Adrian Albert. Scripta Math. Vol. 29 (1973), 253-272.

[63] S. N. Il'in, "*Regularity Criterion for Complete Matrix Semirings*", Mathematical Notes, Vol. 70, No. 3 (2001), 329-336. (Translated from Matematicheskie Zametki, Vol. 70, No. 3 (2001), 366-374).

[64] S.Kar, "*On Quasi-ideals And Bi-ideals Of Ternary Semirings*", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2005, Issue 18 (2005), 3015-3023.

[65] J. M. Howie, "*Fundamentals of Semigroup Theory*", Clarendon Press, Oxford, 1995.

[66] S.Kar, "*On Quasi-ideals And Bi-ideals Of Ternary Semirings*", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2005, Issue 18 (2005), 3015-3023.

[67] T.K.Dutta & S. Kar, "*On Regular Ternary Semirings*", Advances in Algebra, Proceedings of the ICM Satellite Conference in Algebra and Related Topics, World Scientific (2003), 343-355.

[68] T. K. Dutta, & S.Kar, "*On Ternary Semifields*", Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications, Vol. 24, No. 2 (2004), 185-198.

[69] A. M. Gal'mak, & G. N.Vorob'ev, "*Ternary Groups Of Mappings*", (Russian), Izd. Belaruskaya Navyka, Minsk, 1998.

[70] S. Golan, Jonathan, "*Semirings and their Applications*", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[71] S. Golan, Jonathan, "*Power Algebra over Semirings* (*with Applications in Mathematics and Computer Science*)", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[72] W. G. Lister, "*Ternary Rings*", Trans. Amer. Math. Soc., 154 (1971), 37-55.

[73] K. Meyberg, "*Lectures on Algebras and Triple Systems*", Lecture Notes, University of Virginia, 1972.

[74] M. L. Santiago,"*Some contributions to the study of ternary semigroups and semiheaps*", (Ph.D. Thesis, 1983, University of Madras).

[75] S. S. Mitchell, and P. Sinutoke, "*The Theory of Semifields*", Kyungpook Math. J. 22, No. 2 (1982), 325-348.

[76] O. Steinfeld,"*U ber die Quasiideale von Ringen*", Acta Sci. Math. Szeged, 17, (1956), 170-180.

[77] Tamas.Vasile, "*Regular ternary rings*", An. Stiin. Univ. Al. I. Cuza. Ia si Sec. Ia Mat. 33 (1987), no. 2, 89-92. 136.

[78] R.H. Bruck & H.J. Ryser, "*The nonexistence of certain finite projective planes*", Canad. J. Math.1 (1949), 88–93.

[79] J. W. Archbold, " *Algebra"*, Pitman and Sons, London, 1961.

[80] M. K. Bennett." *Affine and Projective Geometry*", Wiley-Interscience Publications, 605, Third Avenue, New York, N.Y, 1995.

[81] J. W. P. Hirschfeld, "*Projective Geometries over Finite Fields"*, (Second Edition). Oxford University Press, Oxford, 1998.

[82] J. G. Semple & G. T. Kneebone, " *Algebraic Projective Geometry*", Oxford University Press, Oxford, 1956.

[83] I.N. Herstein, "*Topics in Algebra*", Waltham, Blaisdell, 1964.

[84] B.L.Van Der Waerden," *Modern Algebra*", Vol. I and II. New York:Frederick Ungar Publ.,Co., 1949.

[85] W. Burnside, "*Theory of groups of finite order*", New York, Dover 1955.

[86] A.Wagner, "*On finite affine line transitive planes*", Math. Z. 87, 1-11, (1965).

[87] H.S.M.Coxeter, "*The Real Projective Plane*", Cambridge University Press, London, 1961.

[88] R. A. Good & D. R.Hughes, "*Associated groups for a semigroup*", Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 624-625.

[89] K. Filipi, *Agjebra dhe Gjeometria* (Ribotim), Tiranë, 2011

[90] F. Sadiki, K. Filipi , "*Some properties of laterally commutative heaps. Construction of such heaps in Desargues plane*", International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications (IJMSEA), ISSN 0973-9424, Vol. 8 No. VI, (December 2014), pp. 9-17.